



# Voyage 200

## Workshop

Mag. Gerhard Hainscho

Ein Unterrichtsbehelf zum Einsatz moderner Technologien  
im Mathematikunterricht



**Mag. Gerhard Hainscho**

# Voyage 200 Workshop



Themenbereich	
Einführung in den Gebrauch des Voyage 200	
Inhalte	Ziele
<ul style="list-style-type: none"><li>• Grundlagen / Typische Anfängerprobleme</li><li>• Gleichungen / (Un)Gleichungssysteme</li><li>• Funktionen</li><li>• Potenzen und Wurzeln</li><li>• Winkelfunktionen</li><li>• Logarithmen</li><li>• Wachstumsmodelle</li><li>• Analysis</li><li>• Stochastik</li><li>• Data/Matrix Editor</li><li>• CellSheet</li><li>• Text Editor</li><li>• Program Editor</li><li>• Numeric Solver</li><li>• Geometrie (Cabri / Geometer's Sketchpad)</li><li>• Datenübertragung</li><li>• Adressen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Den Gebrauch des Voyage 200 sowie einige seiner Besonderheiten anhand von Arbeitsblättern und Aufgaben der Schulmathematik kennen lernen.</li><li>• Anregung zu eigenem Experimentieren.</li></ul>
Begleittext eines Einsteigerseminars mit Schwerpunkt <i>Handling</i> , auch zum Selbststudium geeignet.	

07. 05. 2004

# Inhalt

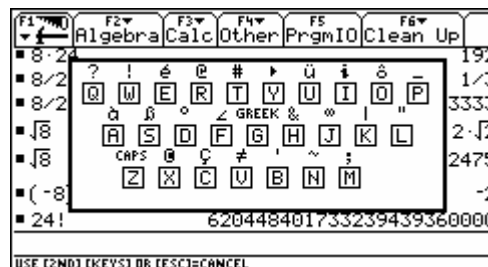
Grundlagen .....	1
Typische Anfängerprobleme .....	4
Gleichungen.....	5
Gleichungssysteme .....	9
Systeme von Ungleichungen .....	14
Funktionen .....	15
Arbeitsblatt Potenzen (1) .....	20
Arbeitsblatt Potenzen (2) .....	21
Arbeitsblatt Wurzeln.....	22
Arbeitsblatt Winkelfunktionen.....	23
Logarithmen .....	24
Wachstumsmodelle .....	25
Arbeitsblatt Analysis.....	27
Arbeitsblatt Integral.....	28
Bestimmtes Integral .....	29
Stochastik .....	31
Data/Matrix Editor .....	36
CellSheet .....	39
Text Editor .....	43
Program Editor.....	44
Numeric Solver .....	47
Cabri Geometrie .....	48
Geometer's Sketchpad Geometrie.....	52
Datenübertragung.....	54
Anhang 1: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme .....	57
Anhang 2: Flächenberechnung mit Ober- und Untersummen.....	58
Internet Adressen .....	59
Adresse des Autors .....	60

# Grundlagen

[APPS] - Home

Nr	Angabe	Eingabe	Ergebnis
1	$8 \cdot 24 =$	8 [X] 24 [ENTER]	
2	$\frac{8}{24} =$	8 [÷] 24 [ENTER]	
		8 [÷] 24 [♦] [ENTER]	
3	$\sqrt{8} =$	[2nd] [√] ( 8 ) [ENTER]	
		[2nd] [√] ( 8 ) [♦] [ENTER]	
4	$\sqrt[3]{-8} =$	[([ (-) 8 ]) ^ ([ 1 ÷ 3 ]) [ENTER]	
5	$24! =$	24 [2nd] W [ENTER]	

- **Zweitbelegungen** ( [2nd] ) : [♦] K

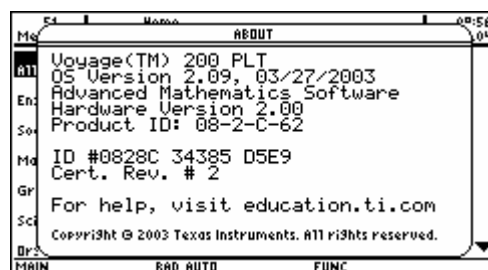


- **Umwandlung**
  - Grad / Minuten / Sekunden → **Dezimalgrad** : ...°...'..." ►DD
  - Z.B.: 0°12' ►DD ⇒ (1/5)°
  - Dezimalgrad → **Grad / Minuten / Sekunden** : ...° ►DMS
  - Altgrad → **Radiant** ([MODE] - Angle = RADIAN) : ...°
  - Radiant → **Altgrad** ([MODE] - Angle = DEGREE) : ...°
  - Cartesische Koordinaten → **Polarkoordinaten** : [... , ...] ►POLAR
  - Polarkoordinaten → **Cartesische Koordinaten** : [... , ∠...] ►RECT
- **Griechische Schriftzeichen** (α, β, γ, ...) : [2nd] G A, [2nd] G B, [2nd] G G, ...
- oder : [2nd] [CHAR] ...
- **Abbruch** von Berechnungen / Plots : [ON]
- Pause / weiter : [ENTER]

- **Kontrast** (Bildschirm dunkler / heller) :  $\blacklozenge + / \blacklozenge -$
- **Bewegung des Cursors**
  - Zeichen für Zeichen (Schritt für Schritt) :  $\blacklozenge \rightarrow$
  - schnelle Bewegung (seitenweises Blättern) :  $2^{nd} \blacklozenge \rightarrow$
  - an den Anfang / ans Ende :  $\blacklozenge \leftarrow \blacklozenge \rightarrow$
  - History-Bereich  $\rightarrow$  Eingabezeile :  $ESC$
- **Weiterrechnen mit letztem Ergebnis** (ans(1)) :  $2^{nd} [ANS]$
- **Löschen**
  - **in der Eingabezeile** nach links / rechts :  $\leftarrow / \blacklozenge [DEL]$
  - **ganze Eingabezeile** ab Cursor nach rechts - links :  $CLEAR CLEAR$
  - **Einfügen / Überschreiben** (dünner / dicker Cursor) :  $2^{nd} [INS]$
  - **im History-Bereich** (Eingabe-Antwort-Paar) :  $CLEAR$
  - **ganzer History-Bereich** :  $F1 - 8: Clear Home$
  - **Variable** :  $DELVAR ...$  oder  $2^{nd} [VAR-LINK] ...$
  - Variable mit 1-Charakter-Namen :  $F6 Clean Up - 1: Clear a-z$
  - **Reset** :  $2^{nd} [MEM] - F1 RESET ...$
  - Tastenkombination :  $\text{ON} 2^{nd} ON$

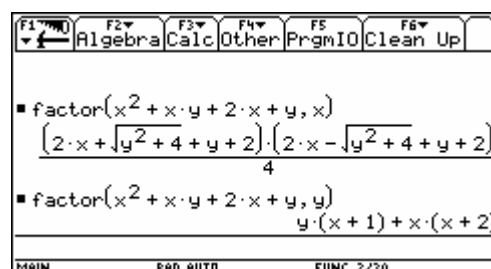
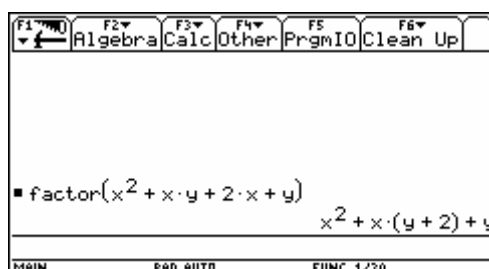
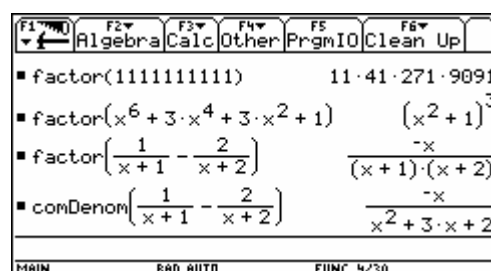
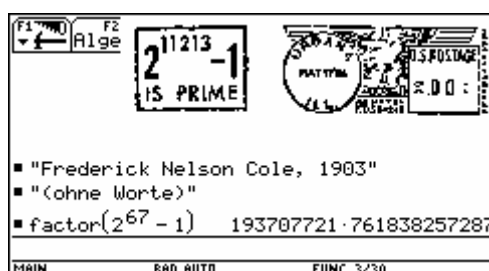
#### Hinweis

- $\mathbf{\text{g}}$  **gesperrte** Variable (  $2^{nd} [VAR-LINK] - F1 Manage - 6: Lock$  ) sind gegen versehentliches Löschen geschützt.
- $\mathbf{\text{x}}$  **archivierte** Variable (  $2^{nd} [VAR-LINK] - F1 Manage - 8: Archive Variable$  ) stehen auch nach einem Reset noch zur Verfügung.
- **Ausschalten**
  - nächstes Einschalten  $\rightarrow$  Startschirm (APPS) :  $2^{nd} [OFF]$
  - nächstes Einschalten  $\rightarrow$  aktueller Zustand :  $\blacklozenge [OFF]$
- **Version** :  $APPS - F1 Menu - 3: About...$

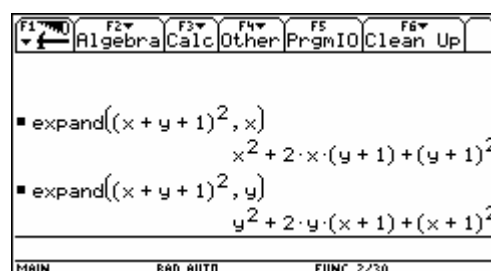
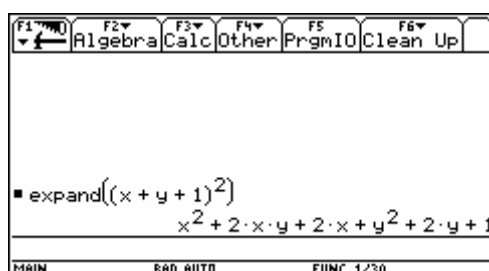
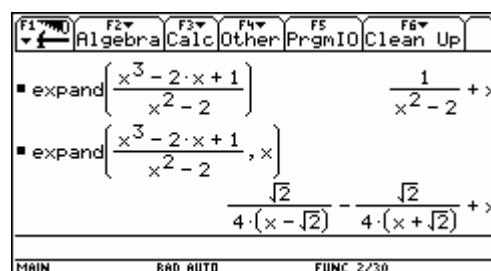
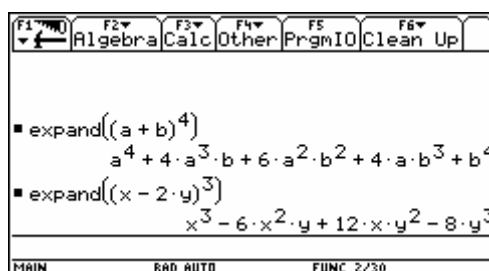


- **Klammern**
  - **Rechenklammern** :  $()$
  - **Matrizen** :  $[]$
  - **Listen** :  $\{\}$
- **GGT** (engl.: Greatest Common Divisor) : **GCD (...)**
- **KGV** (engl.: Least Common Multiple) : **LCM (...)**
- **Vorkomma-Anteil** einer reellen Zahl : **IPART (...)**
- **Nachkomma-Anteil** einer reellen Zahl : **FPART (...)**

- **Größte ganze Zahl  $\leq \dots$  (Gauß-Klammer)** : **FLOOR (...)**  
 $x = \text{FLOOR}(a \div b) * b + \text{MOD}(a, b)$
- **Integer-Division** : **INTDIV (... , ...)**  
 $x = \text{INTDIV}(a, b) * b + \text{REMAIN}(a, b)$
- **Dezimalzahl  $\rightarrow$  Bruch** : **EXACT (...)**
- **FACTOR (...)** : Verwandlung in ein Produkt:  
 Faktorisierung / auf gemeinsamen Nenner bringen; falls eine Variable angegeben ist, wird nach dieser sortiert.



- **EXPAND (...)** : Verwandlung in eine Summe:  
 Ausmultiplizieren / Dividieren (Partialbruchzerlegung); falls eine Variable angegeben ist, wird nach dieser sortiert.



- Analoge Funktionen für **trigonometrische Terme** : **TCOLLECT (...)**  
**TEXPAND (...)**

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>tCollect(<math>(\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2</math>) <math>\cos(2 \cdot \alpha)</math></li> <li>tCollect(<math>(\cos(\alpha))^2</math>) <math>\frac{\cos(2 \cdot \alpha) + 1}{2}</math></li> <li>tCollect(<math>\sin(\alpha) + \sin(8)</math>) <math>\sin(\alpha) + \sin(8)</math></li> <li>tCollect(<math>\sin(\alpha) + \cos(\alpha)</math>) <math>\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}</math></li> </ul>					
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li>tExpand(<math>\sin(\alpha + 8)</math>) <math>\cos(\alpha) \cdot \sin(8) + \sin(\alpha) \cdot \cos(8)</math></li> <li>tExpand(<math>\cos(\alpha - 8)</math>) <math>\cos(\alpha) \cdot \cos(8) + \sin(\alpha) \cdot \sin(8)</math></li> <li>tExpand(<math>\sin(2 \cdot \alpha)</math>) <math>2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)</math></li> <li>tExpand(<math>\cos(2 \cdot \alpha)</math>) <math>2 \cdot (\cos(\alpha))^2 - 1</math></li> </ul>					
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

## Typische Anfängerprobleme

- Klammersetzung
- Klammernarten:  $() \neq [] \neq \{\}$
- Vorzeichenminus  $\neq$  Rechenminus:  $(-)$   $\neq$   $-$
- $0. \neq 0$
- $2a = 2 \cdot a$ , aber  $ab \neq a \cdot b$ ;  $a^{-1}b = a^{-1} \cdot b$ , aber  $ab^{-1} \neq a \cdot b^{-1}$ ; ...
- Interpretation von Ergebnissen mit Formvariablen ( $\frac{\square}{\square}$  ...)
- mit Werten belegte Variable
- veränderte Grundeinstellungen
- voller Speicher

TETRIS			
1. Andrey	265870	1. Andrey	01:48.8
2. David	2000	2. David	05:00.0
3. David	0	3. David	06:00.0
Normal			
V 2.70 2002 by David CB2 Time:000:00			



# Gleichungen

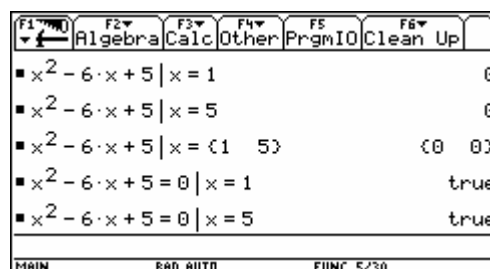
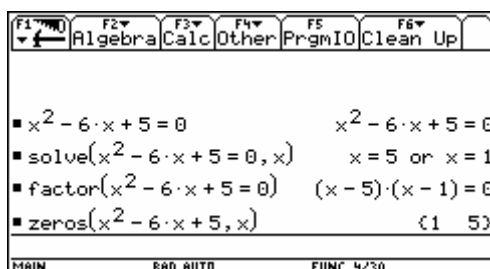
Bsp.:  $x^2 - 6x + 5 = 0$

## 1. Schnelle Lösung mit SOLVE oder FACTOR oder ZEROS

$x^2 - 6x + 5 = 0$   
 $x = 5 \vee x = 1$

| Lösung(en) berechnen

: SOLVE (... , x)



## 2. Lösung durch Äquivalenzumformungen

$x^2 - 6x + 5 = 0$

| x auf der linken Seite isolieren

: (... ) - 5

$x^2 - 6x = -5$

| quadratische Ergänzung

: (... ) + 9

$x^2 - 6x + 9 = 4$

| Zerlegung in Quadrate

: FACTOR (...)

$(x - 3)^2 = 2^2$

| Wurzel

:  $\sqrt{(...)}$

$|x - 3| = 2$

| Lösungsliste erstellen

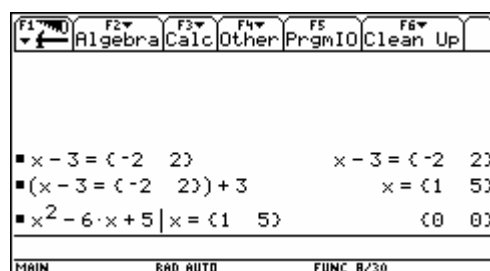
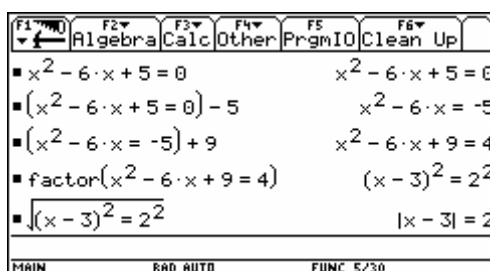
:  $x - 3 = \{-2, 2\}$

$x - 3 = \{-2, 2\}$

| x auf der linken Seite isolieren

: (... ) + 3

$x = \{1, 5\}$



## 3. Tabellarische Lösung

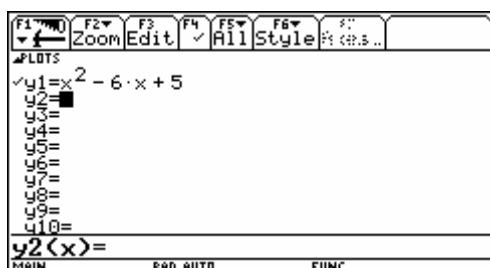
$x^2 - 6x + 5 = 0$

| Term als f(x) bzw. y1(x) definieren

:  $\diamond [Y=]$

| Wertetabelle betrachten

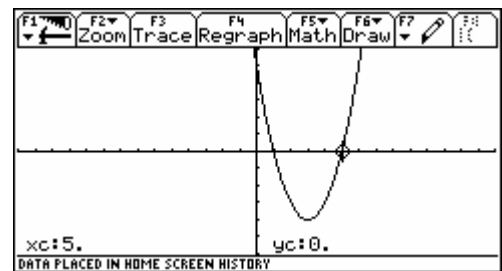
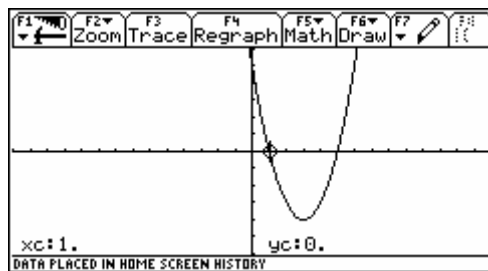
:  $\diamond [TABLE]$



#### 4. Grafische Lösung

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

- |                                     |   |  |
|-------------------------------------|---|--|
| Term als f(x) bzw. y1(x) definieren | : | $\diamond$ [Y=]                        |
| Funktionsgraphen betrachten         | : | $\diamond$ [GRAPH]                     |
| Nullstellen berechnen               | : | $\boxed{F5}$ <b>Math - 2: Zero ...</b> |



WINDOW (ZoomSqr):  $x = -14..14$  /  $y = -6..6$

$\diamond$  **H** kopiert die Ergebnisse numerischer Berechnungen in den HOME-Screen:

■ [1. 0.]	[1. 0.]
■ [5. 0.]	[5. 0.]
MAIN	RAD AUTO FUNC 2/30

#### 5. Lösung durch Substitution

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \quad | \quad x \text{ durch } t - \frac{p}{2} \text{ substituieren}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad | \quad x \text{ durch } t + 3 \text{ substituieren} \quad : \quad \dots | \quad \mathbf{x = t+3}$$

$$t^2 - 4 = 0 \quad | \quad \text{Lösungsliste erstellen} \quad : \quad \mathbf{t = \{-2, 2\}}$$

$$t = \{-2, 2\} \quad | \quad \text{Rücksubstitution} \quad : \quad \dots | \quad \mathbf{t = x-3}$$

$$x - 3 = \{-2, 2\} \quad | \quad x \text{ auf der linken Seite isolieren} \quad : \quad \mathbf{(\dots) + 3}$$

$$\underline{\underline{x = \{1, 5\}}}$$

■ $x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0$	$x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0$
■ $x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0   x = t + 3$	$t^2 - 4 = 0$
■ $t = \{-2, 2\}$	$t = \{-2, 2\}$
■ $t = \{-2, 2\}   t = x - 3$	$x - 3 = \{-2, 2\}$
■ $(x - 3 = \{-2, 2\}) + 3$	$x = \{1, 5\}$
MAIN	RAD AUTO FUNC 5/30

## Aufgaben aus dem Schulbuch

Nr	Angabe	Lösung(en)	Anmerkung
1	$(3x-1)^2 + (4x+2)^2 = (5x+1)(5x-1)$		
2	$x^2 - 2x + 2 = 0$		cSOLVE (... , x)
3	$ax^2 + bx + c = 0$		
4	$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-a} = \frac{a+1}{a}$		SOLVE (... , x) SOLVE (... , a)
5	$\frac{3x-2}{6} - \frac{x+8}{9} \leq 0$		
6	$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{3}$		$(...) \cdot 3 \cdot (x-1)   x > 1$ $(...) \cdot 3 \cdot (x-1)   x < 1$
7	$\sqrt{x+15} + \sqrt{x+3} = 2 \cdot \sqrt{x+8}$		
8	$6^{x+1} - 7^x = 5 \cdot 6^x - 6^{x-1}$		
9	$\ln(5x+12) + \ln(5x-12) = \ln 81$		
10	$\ln(\ln(\ln x)) = 0$		
11	$\sin x = \cos x$		SOLVE (... , x) SOLVE (... , x)   $0 < x$ and $x < 2 \cdot \pi$ SOLVE (... , x)   $0 < x$ and $x < 360$
12	$\sin x = 0,5$		$\sin^{-1}(0,5)$ SOLVE (... , x)   $0 < x$ and $x < 2 \cdot \pi$ SOLVE (... , x)   $0 < x$ and $x < 360$
13	$y' = c \cdot y$		deSOLVE (... , x, y) deSOLVE (... , t, y)
14	$y' = c \cdot y \wedge y(0) = 1$		
15	$y' = c \cdot y + x \wedge y(0) = 1$		

## Historische Aufgaben

1. Aus dem Papyrus Rhind (so genannt nach einem schottischen Antiquitätenhändler, der Teile des Textes in Luxor erwarb - erst nach seinem Tod wurden in New York die fehlenden Teile entdeckt, sodass dieses älteste bekannte mathematische Hand"buch" vollständig vorliegt: eine 5,25 m lange Rolle mit 84 Aufgaben, als Abschrift eines älteren Textes (19. Jh. v. Chr.) vom Schreiber Ahmes um 1650 v. Chr. verfasst.)

a) Haufen; sein  $\frac{2}{3}$ , sein  $\frac{1}{2}$ , sein  $\frac{1}{7}$ , sein Ganzes, es beträgt 33.

$$\left[ \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{7} \cdot x + x = 33; x = \frac{1386}{97} \right]$$

b)  $\frac{2}{3}$  hinzu,  $\frac{1}{3}$  weg, 10 ist der Rest.

$$\left[ x + \frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x = 10; x = \frac{15}{2} \text{ oder } x + \frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{3} \cdot \left( x + \frac{2}{3} \cdot x \right) = 10; x = 9 \right]$$

2. Über Diophantos von Alexandria (3. Jh. n. Chr. ?)

Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!  
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.  
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;  
Noch ein Zwölftel dazu, sprosst' auf der Wange der Bart;  
Dazu ein Siebentel noch, da schloss er das Bündnis der Ehe,  
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.  
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre  
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.  
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer  
Von sich scheuchend kam auch er an das irdische Ziel.

$$\left[ \frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{12} \cdot x + \frac{1}{7} \cdot x + 5 + \frac{1}{2} \cdot x + 4 = x; x = 84 \text{ oder } \frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{12} \cdot x + \frac{1}{7} \cdot x + 5 + \frac{1}{2} \cdot (x - 4) + 4 = x; x = 65 \frac{1}{3} \right]$$

3. Wir drei Liebenden stehen hier und gießen Wasser zum Baden aus, wobei wir Ströme von Wasser in das Becken fließen lassen. Ich auf der rechten Seite fülle es mit meinen langen Füßen im sechsten Teil eines Tages; ich auf der linken Seite mit meinem Krug in vier Stunden und ich in der Mitte mit meinem Bogen in genau einem halben Tag.  
Sag mir, in welcher kurzen Zeit wir das Becken füllen würden, wenn wir drei gleichzeitig Wasser eingießen!

$$\left[ 1 \text{ Tag} = 12 \text{ Stunden} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}; x = \frac{12}{11} \right]$$

4. Eine Goldmünze Konstantins des Großen (Abb. 1) zeigt die Siegesgöttin Viktoria, in der Linken einen Palmzweig, in der Rechten ein Siegesmal (Tropaion) haltend. Im so genannten Abschnitt der Münze, d.h. unter der Bodenlinie, befindet sich die Signatur der Münzstätte Antiochia in Syrien, rechts neben der Göttin die Zahl LXXII, die angibt, wie viele derartige Münzen ein römisches Pfund = 324 g ergeben. Wie schwer müsste die Münze sein?



Abb. 1

$$\left[ x = \frac{324}{72} = 4,5 \text{ g} \right]$$

5. Es sei ein Rohr zuerst senkrecht an eine Mauer gelehnt, dann wird die Spitze um 3 Ellen gesenkt, sodass sich der Fuß des Rohres um 9 Ellen von der Mauer entfernt. Wie lang ist das Rohr?

$$\left[ x^2 = (x-3)^2 + 9^2; x = 15 \right]$$

# Gleichungssysteme

**Bsp. 1:**  $2x + y = 12$   
 $x - 4y = -3$

## 1. Schnelle Lösung mit SOLVE

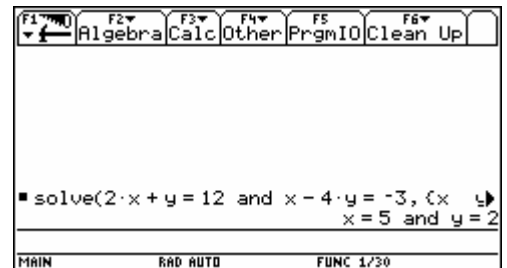
$$2x + y = 12$$

$$x - 4y = -3$$

$$x = 5 \wedge y = 2$$

| Lösung(en) berechnen

: **SOLVE (... AND ..., {x, y})**



## 2. Lösung mit Matrizen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A                      b

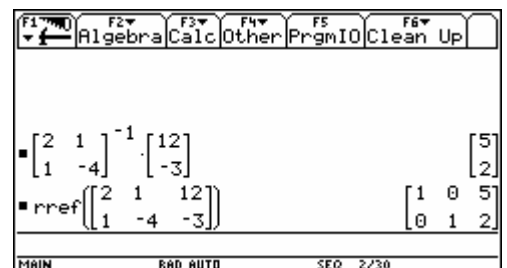
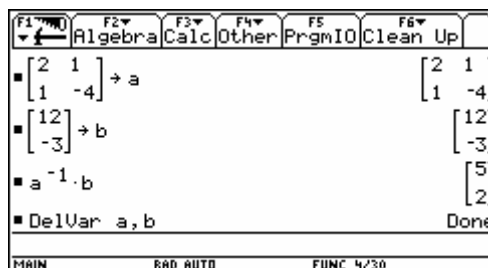
| Eingabe der Koeffizientenmatrix  
 und des konstanten Vektors  
 x berechnen

: **[2, 1; 1, -4] [STO] A**  
**[12; -3] [STO] b**  
**A<sup>-1</sup> b**

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

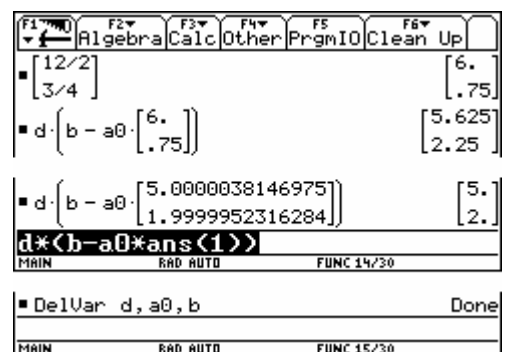
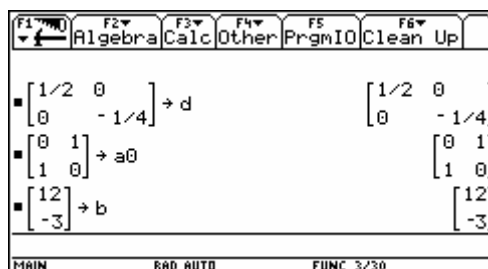
| belegte Variable löschen

: **DELVAR A, b**



**Iterative Lösung (nur bei Matrizen mit Diagonaldominanz):**  $x_n = D \cdot (b - A_0 \cdot x_{n-1})$

Erläuterungen siehe [Anhang 1](#).



### 3. Lösung durch Gleichsetzungsverfahren

$2x + y = 12$	(1)   y aus (1) berechnen	:	<b>SOLVE (... , y)</b>
$y = -2x + 12$	(1*)		
$x - 4y = -3$	(2)   y aus (2) berechnen	:	<b>SOLVE (... , y)</b>
$y = \frac{x+3}{4}$	(2*)		
$-2x + 12 = \frac{x+3}{4}$	x aus (1*) = (2*) berechnen	:	<b>SOLVE (... , x)</b>
$x = 5$	x in (1*) oder (2*) rückeinssetzen	:	<b>...   x = 5</b>
$y = 2$			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<div> <div>2 · x + y = 12</div> <div>x - 4 · y = -3</div> <div>solve(2 · x + y = 12, y)</div> <div>solve(x - 4 · y = -3, y)</div> <div>solve(12 - 2 · x = <math>\frac{x+3}{4}</math>, x)</div> <div>y = 12 - 2 · x   x = 5</div> </div> <div> <div>2 · x + y = 12</div> <div>x - 4 · y = -3</div> <div>y = 12 - 2 · x</div> <div>y = <math>\frac{x+3}{4}</math></div> <div>x = 5</div> <div>y = 2</div> </div>					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30					

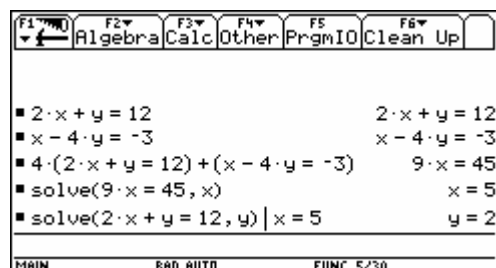
### 4. Lösung durch Einsetzungsverfahren

$2x + y = 12$	(1)   y aus (1) berechnen	:	<b>SOLVE (... , y)</b>
$y = -2x + 12$	(1*)		
$x - 4y = -3$	(2)   (1*) einsetzen und x berechnen	:	<b>SOLVE (... , x)   y = ...</b>
$x = 5$	x in (1*) rückeinssetzen	:	<b>...   x = 5</b>
$y = 2$			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<div> <div>2 · x + y = 12</div> <div>x - 4 · y = -3</div> <div>solve(2 · x + y = 12, y)</div> <div>solve(x - 4 · y = -3, x)   y = 12 - 2 · x</div> <div>y = 12 - 2 · x   x = 5</div> </div> <div> <div>2 · x + y = 12</div> <div>x - 4 · y = -3</div> <div>y = 12 - 2 · x</div> <div>x = 5</div> <div>y = 2</div> </div>					
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30					

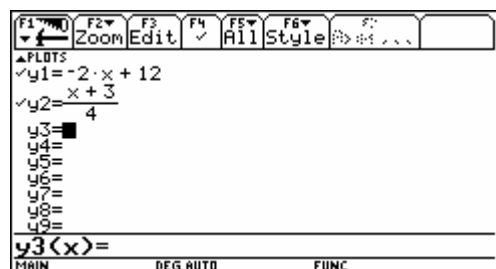
## 5. Lösung durch Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{llll}
 2x + y = 12 & (1) & & \\
 x - 4y = -3 & (2) & | \cdot 4 \cdot (1) + (2) & : 4 \cdot (...) + (...) \\
 9x = 45 & & | x \text{ berechnen} & : \text{SOLVE } (... , x) \\
 \underline{x = 5} & & | x \text{ in (1) einsetzen und } y \text{ berechnen} & : \text{SOLVE } (... , y) \mid x = 5 \\
 \underline{y = 2} & & & 
 \end{array}$$

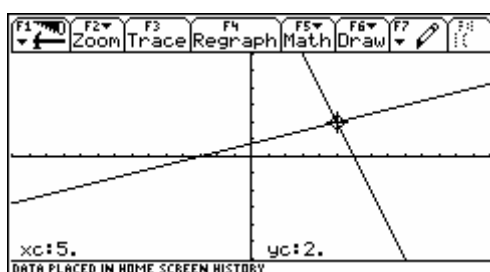


## 6. Grafische Lösung

$$\begin{array}{llll}
 2x + y = 12 & | y \text{ berechnen} & : \text{SOLVE } (... , y) \\
 y = -2x + 12 & | \text{Term als } f1(x) \text{ bzw. } y1(x) \text{ definieren} & : \blacklozenge [Y=] \\
 x - 4y = -3 & | y \text{ berechnen} & : \text{SOLVE } (... , y) \\
 y = \frac{x+3}{4} & | \text{Term als } f2(x) \text{ bzw. } y2(x) \text{ definieren} & : \blacklozenge [Y=]
 \end{array}$$



- | Funktionsgraphen betrachten :  $\blacklozenge$  [GRAPH]
- | Schnittpunkt berechnen :  $\text{F5}$  **Math - 5: Intersection ...**
- | Wertetabelle betrachten :  $\blacklozenge$  [TABLE]



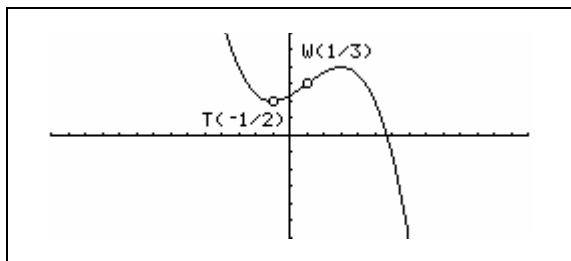
x	y1	y2			
0.	12.	.75			
1.	10.	1.			
2.	8.	1.25			
3.	6.	1.5			
4.	4.	1.75			
5.	2.	2.			
6.	0.	2.25			
7.	-2.	2.5			

WINDOW (ZoomSqr):  $x = -14..14$  /  $y = -6..6$

$\blacklozenge$  **H** kopiert die Ergebnisse numerischer Berechnungen in den HOME-Screen:

$\blacksquare$ [5. 2.]	[5. 2.]
------------------------	---------

**Bsp. 2:** Eine Polynomfunktion ist durch ihren Graphen gegeben:



- Wie hoch ist der Grad der dargestellten Polynomfunktion?
- Ermittle die Gleichung der Polynomfunktion aus den gegebenen Eigenschaften.

### Vorbereitung

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \rightarrow f0(x)$$

$$d(f0(x), x) \rightarrow f1(x)$$

$$d(f0(x), x, 2) \rightarrow f2(x)$$

gesuchte Funktion als f0(x) speichern

1. Ableitung als f1(x) speichern

2. Ableitung als f2(x) speichern

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \rightarrow f0(x)$ Done					
$\frac{d}{dx}(f0(x)) \rightarrow f1(x)$ Done					
$\frac{d^2}{dx^2}(f0(x)) \rightarrow f2(x)$ Done					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$f0(x) \quad a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$					
$f1(x) \quad 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$					
$f2(x) \quad 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

### Formulierung der Bedingungen

$$T(-1/2) \Rightarrow f0(-1) = 2$$

$$f1(-1) = 0$$

$$W(1/3) \Rightarrow f0(1) = 3$$

$$f2(1) = 0$$

$f0(-1) = 2$	$-a + b - c + d = 2$
$f1(-1) = 0$	$3 \cdot a - 2 \cdot b + c = 0$
$f0(1) = 3$	$a + b + c + d = 3$
$f2(1) = 0$	$6 \cdot a + 2 \cdot b = 0$
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30	

### Lösung mit SOLVE

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve}(f0(-1)=2 \text{ and } f1(-1)=0 \text{ and } f0(1)=3 \text{ and } f2(1)=0, \{a,b,c,d\})$					
$a = -1/16 \text{ and } b = 3/16 \text{ and } c = 9/16 \text{ and } d = 37/16$					
$f0(x) \mid a = -1/16 \text{ and } b = 3/16 \text{ and } c = 9/16$					
$\frac{-x^3}{16} + \frac{3 \cdot x^2}{16} + \frac{9 \cdot x}{16} + \frac{37}{16}$					
$\text{comDenom}\left(\frac{-x^3}{16} + \frac{3 \cdot x^2}{16} + \frac{9 \cdot x}{16} + \frac{37}{16}\right)$					
$\frac{-x^3 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 37}{16}$					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

SOLVE (... AND ... AND ... AND ..., {a,b,c,d})

### Hinweis

Die Gleichungen können entweder in der Form  $-a + b - c + d = 2$  AND ... oder in der Form  $f0(-1) = 2$  AND ... eingegeben werden.

### belegte Variable löschen

$\text{DelVar } f0, f1, f2$	Done
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30	



**Bsp. 3:** Setze die Funktion  $f: y_1(x) = 1/8 \cdot (x^3 - 12x^2 + 36x) \mid x \leq 4$  „knickfrei“ fort, und zwar

- durch eine lineare Funktion.
- durch eine quadratische Parabel, die durch  $P(5/0)$  geht.
- durch eine quadratische Parabel, die die x-Achse berührt.

### Lösungsvorschlag für Teilaufgabe a)

#### Vorbereitung

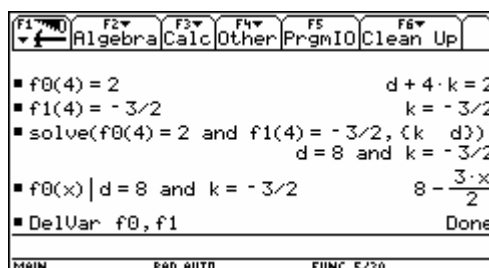
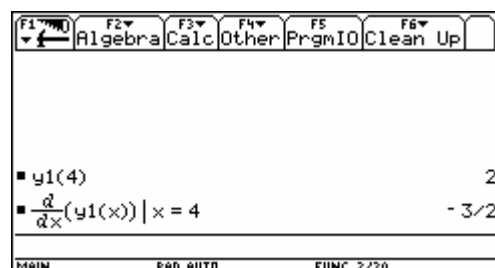
$k \cdot x + d \rightarrow f_0(x)$

| gesuchte Funktion als  $f_0(x)$  speichern

$k \rightarrow f_1(x)$

| 1. Ableitung als  $f_1(x)$  speichern

#### Formulierung der Bedingungen und Lösung mit SOLVE



**Hinweis:** Die Gleichungen können entweder in der Form  $d + 4k = 2$  AND ... oder in der Form  $f_0(4) = 2$  AND ... oder in der Form  $f_0(4) = y_1(4)$  AND ... eingegeben werden.

### Lösungsvorschlag für Teilaufgaben b) und c)

#### Vorbereitung

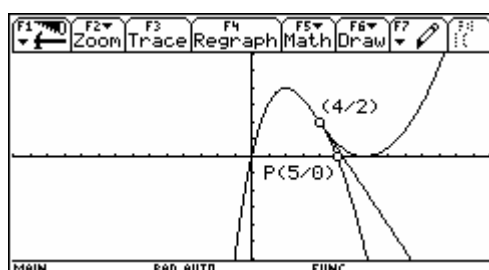
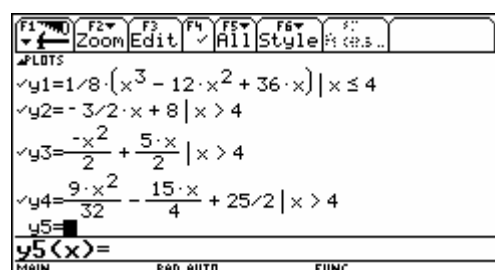
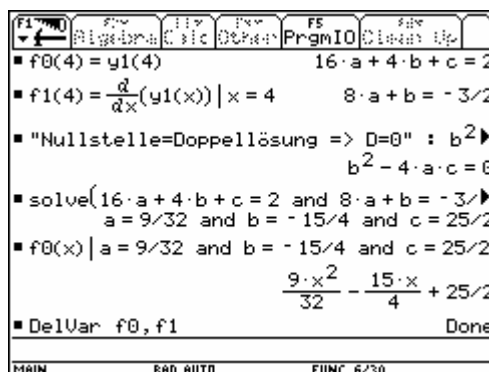
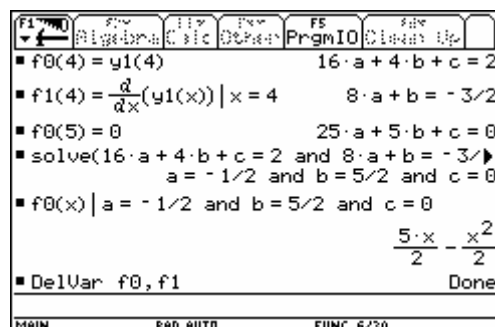
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \rightarrow f_0(x)$

| gesuchte Funktion als  $f_0(x)$  speichern

$d \langle f_0(x), x \rangle \rightarrow f_1(x)$

| 1. Ableitung als  $f_1(x)$  speichern

#### Formulierung der Bedingungen und Lösung mit SOLVE



WINDOW (ZoomSqr):  $x = -14..14$  /  $y = -6..6$

**Hinweis:** Die Gleichungen eines Systems können auch nichtlinear sein.

# Systeme von Ungleichungen

Bsp. 1:  $x \geq 0$

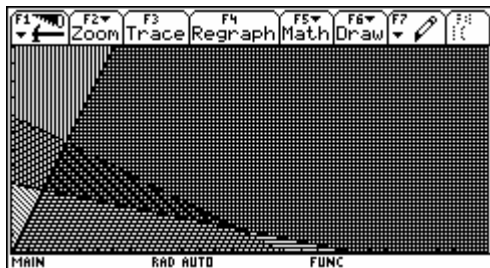
$$y \geq 0$$

$$y \geq -\frac{1}{5}x + 4$$

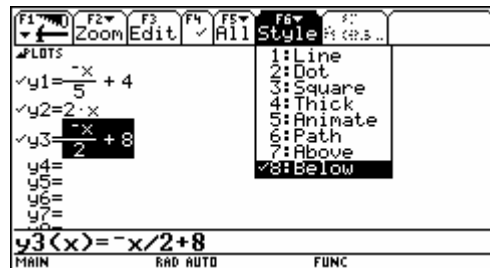
$$y \leq 2x$$

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 8$$

## Grafische Lösung



WINDOW (ZoomSqr):  $x = 0..28$  /  $y = 0..12$



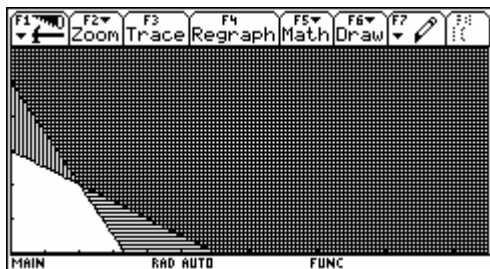
Bsp. 2: (1)  $x \geq 0$

(2)  $y \geq 0$

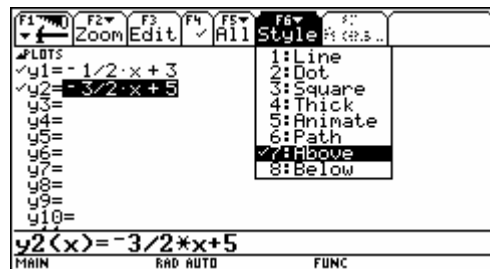
(3)  $x + 2y \geq 6$

(4)  $3x + 2y \geq 10$

- Stelle das Lösungsgebiet des gegebenen Systems grafisch dar.
- Erfinde eine Zielfunktion  $z_1$ , die (1)  $\cap$  (4) als Lösung einer Minimumaufgabe ergibt.
- Erfinde eine Zielfunktion  $z_2$ , die **keine** eindeutige Lösung einer Minimumaufgabe ergibt.



WINDOW (ZoomSqr):  $x = 0..14$  /  $y = 0..6$



## Lösungsvorschlag für Teilaufgaben b) und c)

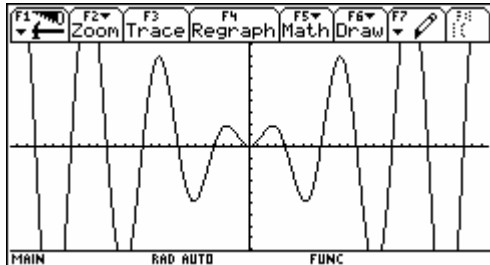
b)  $z_1: y = k \cdot x$  mit  $k < -\frac{3}{2}$  (z.B.  $y = -2x$ )

c)  $z_2: y = k \cdot x$  mit  $k \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$  oder  $z_2: x = 0$

# Funktionen

## 1. xy-Darstellung: MODE - Graph = FUNCTION

- Bsp. 1:  $f(x) = x \cdot \sin(x)$

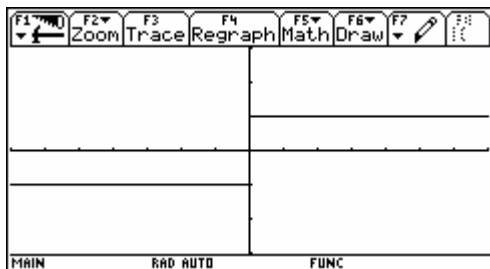


F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Mode	Del	Pow	Int	Pow	
x	y1						
0.	0.						
1.	.84147						
2.	1.8186						
3.	.42336						
4.	-3.027						
5.	-4.795						
6.	-1.676						
7.	4.5989						
x=0.							
MAIN	RAD AUTO	FUNC					

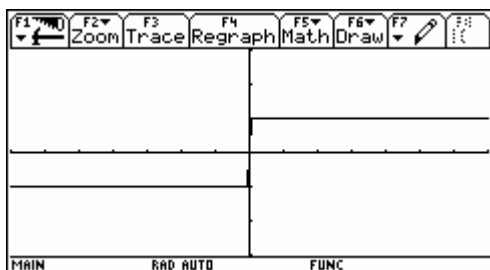
WINDOW (ZoomSqr):  $x = -21..21$  /  $y = -9..9$  /  $x\text{scl} = \pi/4$

**Achtung:** [MODE] - Angle = RADIAN

- Bsp. 2 *stückweise definierte Funktionen*:  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Zoom	Edit	✓	All	Style	Fit	Ch.S...	
PLOTS							
✓y1=0·x-1 x<0							
✓y2=0·x x=0							
✓y3=0·x+1 x>0							
y4=							
y5=							
y6=							
y7=							
y8=							
y9=							
y4(x)=							
MAIN	RAD AUTO	FUNC					



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Zoom	Edit	✓	All	Style	Fit	Ch.S...	
PLOTS							
✓y1={-1,x<0;0,x=0;1,else,else							
y2=							
y3=							
y4=							
y5=							
y6=							
y7=							
y8=							
y9=							
y2(x)=							
MAIN	RAD AUTO	FUNC					

WINDOW (ZoomSqr):  $x = -7..7$  /  $y = -3..3$

**Achtung:** Der | -Operator arbeitet nur, wenn die Variable x im Funktionsterm vorkommt.

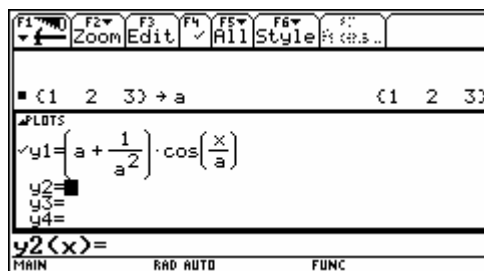
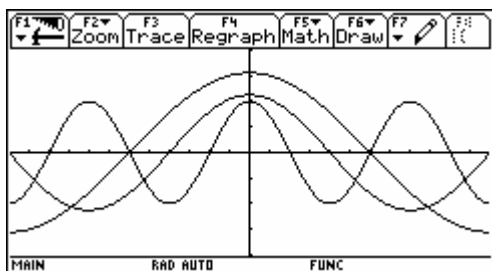
Oder : WHEN(bedingung,dann,sonst), hier:  $y1(x) = \text{when}(x < 0, -1, \text{when}(x = 0, 0, 1))$ .

Der letzte Punkt eines Zweigs wird dabei stets mit dem ersten Punkt des nächsten Zweigs verbunden; Ausweg: [F6] Style - 2: Dot

**Hinweis:** Die implementierte Funktion sign(x) liefert ein merkwürdiges Ergebnis für  $x = 0$ :

■ $\text{sign}(x) \mid x < 0$	-1
■ $\text{sign}(x) \mid x = 0$	±1
■ $\text{sign}(x) \mid x > 0$	1
<hr/>	
MAIN	R&D AUTO
	FUNC 3/30

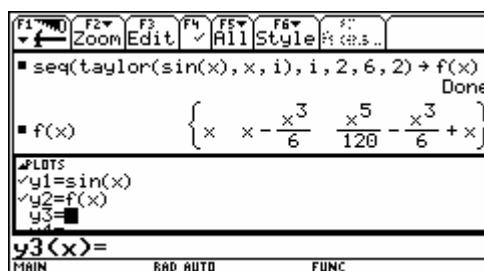
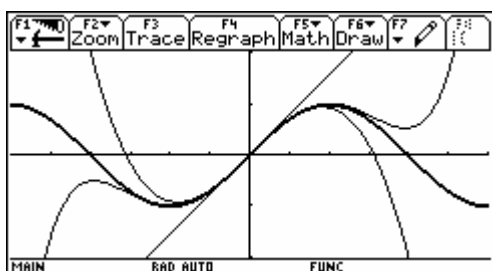
- **Bsp. 3 Funktionenscharen:**  $f(x) = \left(a + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{a}\right)$



WINDOW (ZoomSqr):  $x = -9.3 \dots 9.3$  /  $y = -4.4$  /  $x\text{scl} = \pi/4$

**Achtung:** **MODE** - Angle = RADIAN

- **Bsp. 4 Funktionenscharen:** Taylorentwicklung von  $\sin(x)$

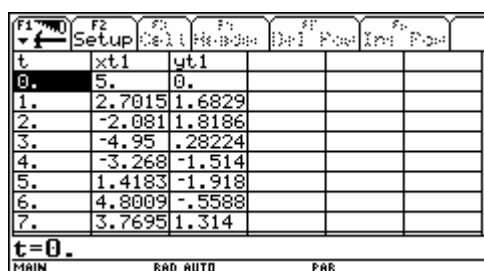
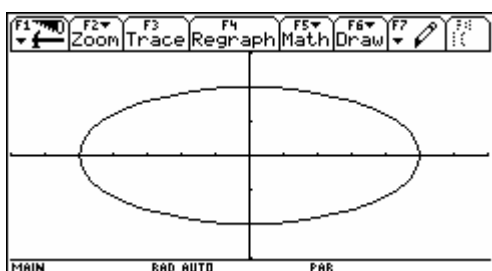


WINDOW (ZoomSqr):  $x = -\frac{3\pi}{2} \dots \frac{3\pi}{2}$  /  $y = -2.02 \dots 2.02$  /  $x\text{scl} = \pi/2$

**Achtung:** **MODE** - Angle = RADIAN / Plot sehr zeitaufwendig

## 2. Parameterdarstellung: **MODE** - Graph = **PARAMETRIC**

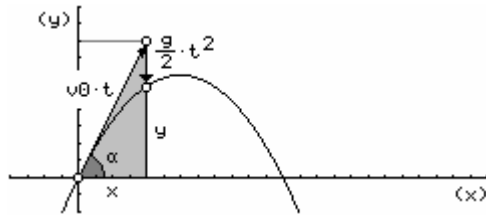
- **Bsp. 1:**  $f(t) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \end{pmatrix}$



WINDOW (ZoomSqr):  $t = 0 \dots 2\pi$  /  $x = -7.7$  /  $y = -3.3$

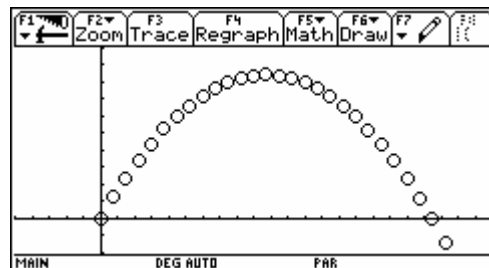
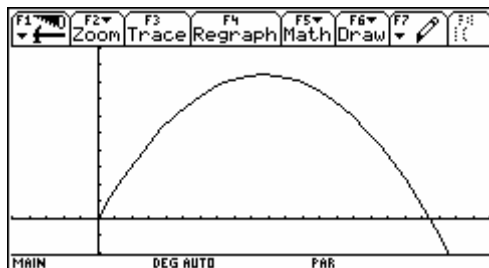
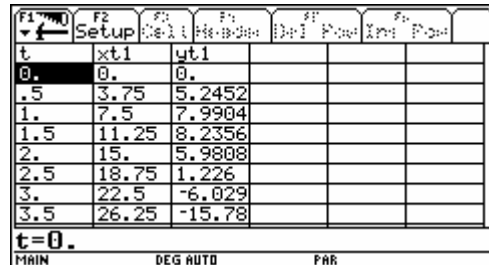
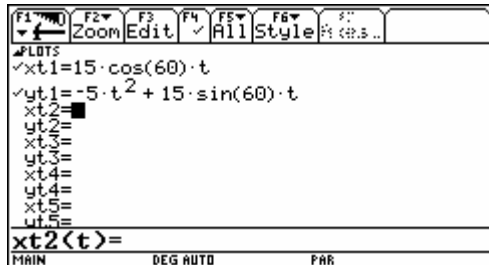
**Achtung:** **MODE** - Angle = RADIAN

- **Bsp. 2 Wurfparabel:**  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 60^\circ$  und  $g = 10 \text{ m/s}^2$



$$\cos(\alpha) = \frac{x}{v_0 \cdot t} \Rightarrow x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y + \frac{g}{2} \cdot t^2}{v_0 \cdot t} \Rightarrow y = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t$$



[F6] Style - 1: Line

[F6] Style - 5: Animate

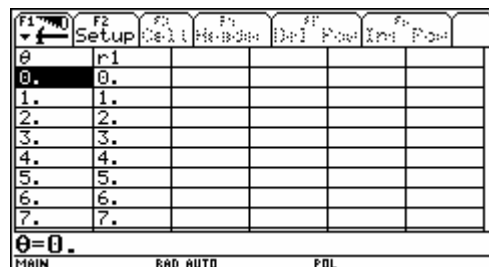
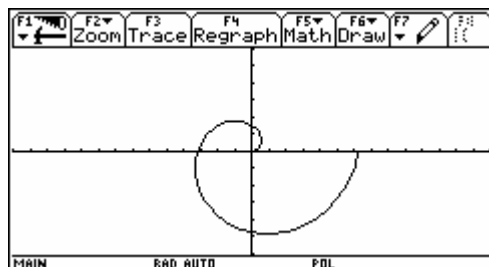
WINDOW (ZoomSqr):  $t = 0.3$  /  $tstep = 0.1$  /  $x = -5.23$  /  $y = -2.10$

**Achtung:** [MODE] - Angle = DEGREE

**Hinweis:** Eine interessante Darstellung ergibt sich auch, wenn dieselbe Funktion zweimal in verschiedenen Stilen gezeichnet wird (Formateinstellung: [F6] F - Graph Order = SEQ). Wiederholung der Animation mit [F4] Regraph.

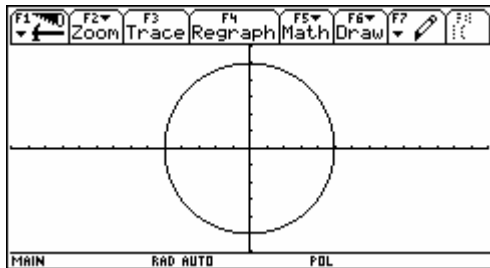
### 3. Polardarstellung: MODE - Graph = POLAR

- **Bsp. 1:**  $f(\theta) = \theta$



WINDOW (ZoomSqr):  $\theta = 0 \dots 2\pi$  /  $x = -14 \dots 14$  /  $y = -6 \dots 6$

- **Bsp. 2:**  $f(\theta) = 5$



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
2nd	Zoom	Trace	Regrph	Math	Draw	2nd	2nd
0.	5.						
1.	5.						
2.	5.						
3.	5.						
4.	5.						
5.	5.						
6.	5.						
7.	5.						
$\theta = 0.$							
MAIN RAD AUTO PDL							

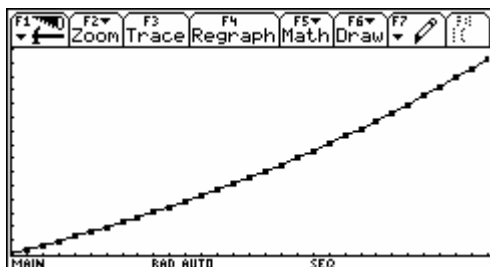
WINDOW (ZoomSqr):  $\theta = 0 \dots 2\pi$  /  $x = -14 \dots 14$  /  $y = -6 \dots 6$

#### 4. Folgen: MODE - Graph = SEQUENCE

- **Bsp. 1 exponentielles Wachstum (Zinsen):**

$$f(n) = f(n-1) \cdot 1.03 \quad \text{bzw.} \quad f(n) = 1000 \cdot 1.03^n$$

$$f(0) = 1000$$



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
2nd	Zoom	Edit	✓	All	Style	Axes...	
PLOTS							
✓ u1=u1(n-1)·1.03							
u1=1000							
✓ u2=1000·(1.03)^n							
u2=							
u3=							
u4=							
u5=							
u6=							
u3(n)=							
MAIN RAD AUTO SEQ							

WINDOW:  $n = 0 \dots 30$  /  $x = 0 \dots 30$  /  $y = 1000 \dots 2500$

**Achtung:** Funktionen ohne ✓ werden nicht dargestellt, aber trotzdem berechnet.

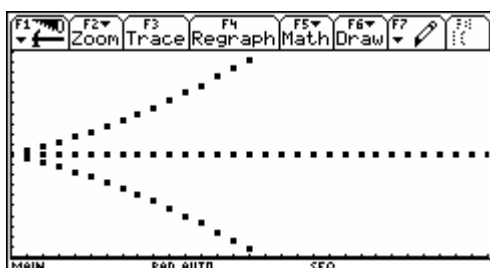
- **Bsp. 2 Tilgungsplan:** Ein Kredit von 10 000,- € mit 6% Zinsen p.a. wird in jährlichen Raten von

a) 1000,- €

b) 600,- €

c) 200,- €

zurückgezahlt. Wann ist man schuldenfrei?



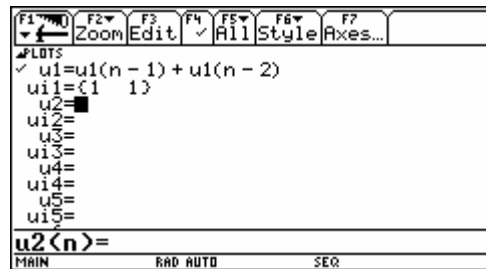
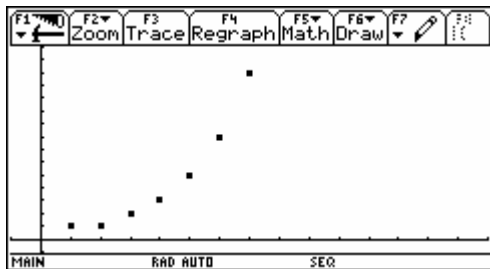
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
2nd	Zoom	Edit	✓	All	Style	Axes...	
PLOTS							
✓ u1=u1(n-1)·1.06 - 1000							
u1=10000							
✓ u2=u2(n-1)·1.06 - 600							
u2=10000							
✓ u3=u3(n-1)·1.06 - 200							
u3=10000							
u4=							
u5=							
u6=							
u4(n)=							
MAIN RAD AUTO SEQ							

WINDOW:  $n = 0 \dots 30$  /  $x = 0 \dots 30$  /  $y = 0 \dots 20000$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
2nd	Setup	Cell	Head	Del	Pol	In	Pol
n	u1	u2	u3				
0.	10000.	10000.	10000.				
1.	9600.	10000.	10400.				
2.	9176.	10000.	10824.				
3.	8726.6	10000.	11273.				
4.	8250.2	10000.	11750.				
5.	7745.2	10000.	12255.				
6.	7209.9	10000.	12790.				
7.	6642.5	10000.	13358.				
$n=0.$							
MAIN RAD AUTO SEQ							

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
2nd	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		
n	u1	u2	u3				
14.	1594.	10000.	18406.				
15.	689.61	10000.	19310.				
16.	-269.	10000.	20269.				
$u1(15) \cdot 1.06$ 730.989							
MAIN RAD AUTO SEQ 1/30							

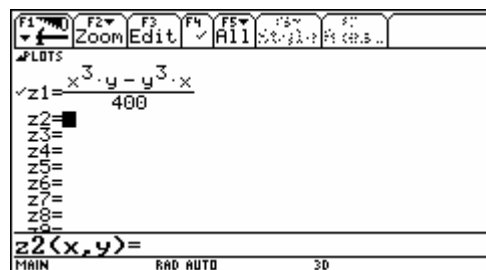
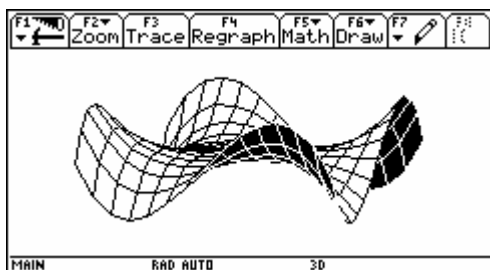
- **Bsp. 3 Fibonacci-Folge:**  $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$   
 $\{f(2), f(1)\} = \{1, 1\}$



WINDOW:  $n = 1..10$  /  $x = -1..15$  /  $y = -1..15$

## 5. 3D-Darstellung: MODE - Graph = 3D

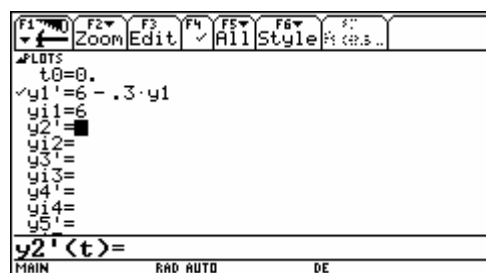
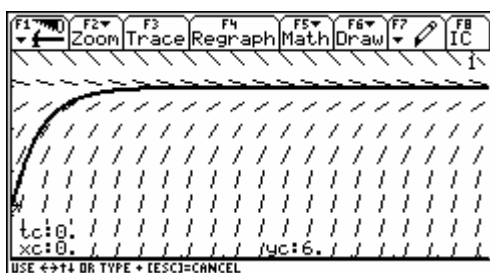
- **Bsp.:**  $f(x,y) = \frac{x^3y - y^3x}{400}$



WINDOW (ZoomSqr):  $x = -10..10$  /  $y = -10..10$  /  $z = -10..10$  /  $\Theta = 20^\circ$  /  $\Phi = 70^\circ$  /  $\Psi = 0^\circ$   
 Formateinstellung: ☒ F - Style = HIDDEN SURFACE

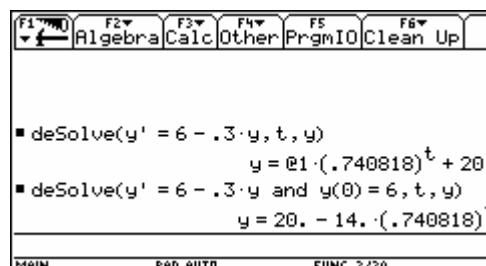
## 6. Differentialgleichungen: MODE - Graph = DIFF EQUATIONS

- **Bsp. begrenztes Wachstum:**  $f'(t) = 6 - 0,3 \cdot f(t)$   
 $f(0) = 6$



WINDOW:  $t = 0..30$  /  $x = 0.56$  /  $y = 0.24$

Ermittlung der Funktionsgleichung:



# Arbeitsblatt **Potenzen** (1)

- Ziel:** Potenzen in Brüche bzw. Wurzeln verwandeln können und umgekehrt. Den numerischen Wert angeben können.

Ergänze folgende Tabelle (soweit es sinnvoll erscheint).

Nr	Potenz	Bruch / Wurzel	numerischer Wert
1	$3^{-5}$		
2	$n^{-7}$		
3		$\frac{1}{8}$	
4			0,001
5	$7^{-x}$		
6		$\sqrt[3]{5}$	
7		$\sqrt[4]{x^3}$	
8	$8^{\frac{1}{7}}$		
9	$a^{\frac{r}{s}}$		
10			3
11	$4^{-\frac{1}{2}}$		
12	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$		
13	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$		
14			1
15		$\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$	



# Arbeitsblatt **Potenzen** (2)

- Ziel:** Potenzen in Brüche bzw. Wurzeln verwandeln können und umgekehrt. Rechenregeln für Potenzen anwenden können. Den numerischen Wert angeben können.

Ergänze folgende Tabelle (soweit es sinnvoll erscheint).

Nr	Angabe	Lösung		
		Potenz	Bruch	numerischer Wert
1	$10^{-3} \cdot 10^6 \cdot 10^{-5}$	$10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$	$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{100}$	0,01
2	$0,04^{-2}$			
3	$(0,5^{-1})^{-2}$			
4	$-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-1}$			
5	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-3}$			
6	$\left(\left(\frac{2}{15}\right)^2\right)^{-3} : \left(\frac{5}{2}\right)^2$			
7	$\frac{3x^4}{6x^{-3}}$			
8	$\frac{b^{5-s}}{b^{-s}}$			
9	$(a^2 - b^2)^4 \cdot (a + b)^{-4}$			
10	$\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-2} + y^{-2}}$			
11	$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{b}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{b}{ab-4}\right)^{-2}$			
12	$\frac{5^3 \cdot (-3)^5 \cdot 2^2}{(-6)^{-2} \cdot 2^{-3}}$			
13	$\frac{5abc}{2a^{-2}b} : \frac{10ab^{-1}}{5^{-2}c^{-3}}$			
14	$\left[\frac{5abc}{2a^{-2}b} : \frac{10ab^{-1}}{5^{-2}c^{-3}}\right]^0$			
15	$(y^{-1} - x^{-1})^{-1}$			

# Arbeitsblatt **Wurzeln**

1. **Ziel:** Rechenregeln für Potenzen bzw. Wurzeln anwenden können.

Vereinfache die gegebenen Ausdrücke so weit wie möglich und stelle die Ergebnisse exakt und numerisch dar.

Nr	Angabe	exakte Lösung	Begründung	numerische Lösung
1	$\sqrt{8} =$			
2	$\sqrt{2} + \sqrt{8} =$			
3	$(\sqrt{27} + \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3} =$			
4	$\sqrt{3 \cdot \sqrt{3}} =$			
5	$\sqrt[3]{375} =$			
6	$(1 + \sqrt{2})^3 =$			
7	$\frac{1}{\sqrt{2}} =$			
8	$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} =$			
9	$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$			
10	$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} =$			

2. **Ziel:** Rechenregeln für Potenzen bzw. Wurzeln anwenden können. Die Fibonacci-Folge kennen.

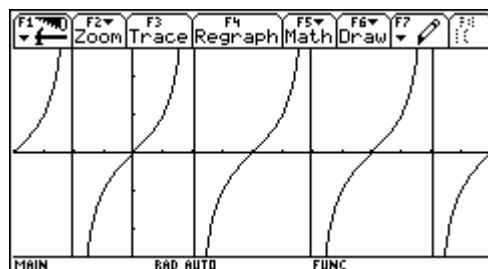
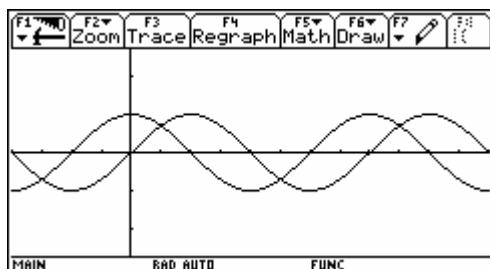
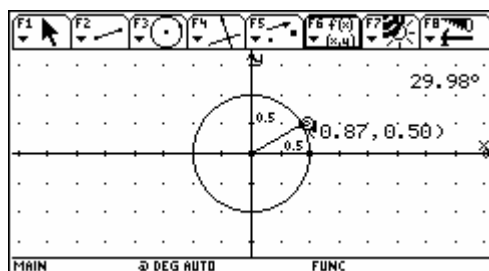
Ermittle für  $n = 1, 2, 3, \dots$  die ersten Glieder der Folge  $\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \right\rangle$ .

3. **Ziel:** Rechenregeln für Potenzen bzw. Wurzeln anwenden können. Den goldenen Schnitt kennen.

Die Zahl  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  heißt „goldener Schnitt“; sie wird üblicherweise zu Ehren des griechischen Bildhauers ΦΙΔΙΑΣ mit  $\Phi$  bezeichnet.

- Zeige:  $\Phi^2 = \Phi + 1$ ,  $\Phi^3 = 2\Phi + 1$ ,  $\Phi^4 = 3\Phi + 2$
- Findest du entsprechende Formeln für höhere Potenzen?
- $\Phi^{-1} =$

# Arbeitsblatt Winkelfunktionen



WINDOW (ZoomSqr):  $x = -\pi..3\pi$  /  $y = -2,693..2,693$  /  $x\text{scl} = \pi/4$

**Achtung:** **MODE** - Angle = RADIAN

- Ziel:** Winkelfunktionswerte spezieller Winkel berechnen können. Reduktionsformeln durch geometrische Überlegungen aufstellen können. Eigenschaften der Winkelfunktionen kennen.

Berechne folgende Winkelfunktionswerte. Wie lassen sich die Ergebnisse begründen?

Nr	Angabe	exakte Lösung	numerische Lösung
1	$\sin 12^\circ =$		
2	$\sin 30^\circ =$		
3	$\sin 15^\circ =$		
4	$\sin 45^\circ =$		
5	$\sin 72^\circ =$		
6	$\sin 123^\circ =$		
7	$\cos 123^\circ =$		
8	$\tan 50^\circ =$		
9	$\tan 90^\circ =$		
10	$\cos x = 0,5$		

# Logarithmen

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<div> <div> <math>\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow a\log(x, a)</math> </div> <div>Done</div> </div> <div> <div><math>a\log(49, 7)</math></div> <div>2</div> </div> <div> <div><math>a\log(49, 10)</math></div> <div><math>\frac{2 \cdot \ln(7)}{\ln(10)}</math></div> </div> <div> <div><math>a\log(49, 10)</math></div> <div>1.6902</div> </div> <div> <div><math>\log(49)</math></div> <div>1.6902</div> </div>					
MAIN      RAD AUTO      FUNC 5/30					

**Bsp.:** Wie viele Ziffern hat 2004! ?

**Überlegung:** wir kennen die Ziffernanzahl von 10er-Potenzen:

$$1000 = 10^3 \Rightarrow 4 \text{ Ziffern}$$

$$1001 = 10^{3,00043} \Rightarrow 4 \text{ Ziffern}$$

$$10000 = 10^4 \Rightarrow 5 \text{ Ziffern}$$

**Idee:**  $2004! = 10^x \quad | \log$

$$\log 2004! = x \cdot \underbrace{\log 10}_1$$

$$x = \log 2004! = \log(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2004) = \log 1 + \log 2 + \dots + \log 2004 = \sum_{i=1}^{2004} \log i = 5748,73 \Rightarrow \mathbf{5749 \text{ Ziffern}}$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<div> <div> <math>\sum_{i=1}^{2004} \log(i)</math> </div> <div>5748.73</div> </div> <div> <math>\Sigma(\log(i), i, 1, 2004)</math> </div>					
MAIN      RAD AUTO      FUNC 1/30					

**Achtung:**  **ENTER** / lange Rechenzeit

**Zusatzfrage 1:** Wie lautet die Einerziffer von 2004! ?

→ 0, denn:

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \dots$$

ab 5! enden alle Fakultäten auf 0 ( $0 \cdot x = 0$ )

**Zusatzfrage 2:** Auf wie viele Nullen endet 2004! ?

→ 499, denn:

Jede der Endnullen entsteht letztlich durch Multiplikation mit  $10 = 2 \cdot 5$ ; da jede zweite Zahl gerade ist und damit den Faktor 2 enthält, sind lediglich jene Zahlen zu ermitteln, die den Faktor 5 enthalten:

$$\text{IntDiv}(2004, 5) = 400 \quad (400 \text{ Zahlen enthaltenden den Faktor } 5)$$

$$\text{IntDiv}(400, 5) = 80 \quad (80 \text{ weitere Zahlen enthalten den Faktor } 5^2)$$

$$\text{IntDiv}(80, 5) = 16 \quad (16 \text{ weitere Zahlen enthalten den Faktor } 5^3)$$

$$\text{IntDiv}(16, 5) = 3 \quad (3 \text{ weitere Zahlen enthalten den Faktor } 5^4)$$

$$\text{Insgesamt} : \mathbf{499 \text{ Nullen}}$$

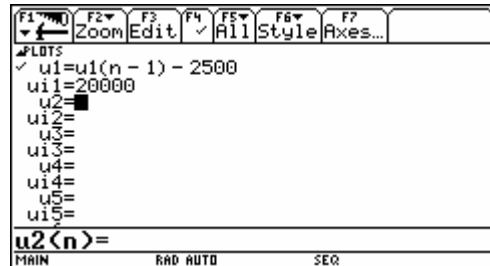
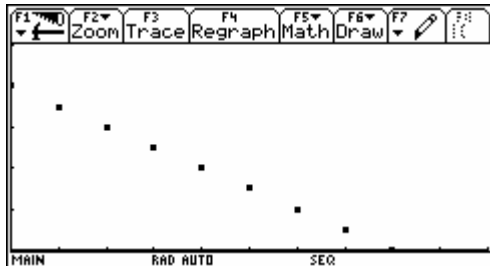
**Zusatzfrage 3:** Wann kommt die 500. Null ?

→ Mit dem nächsten Wert, der den Faktor 5 enthält, also 2005.

# Wachstumsmodelle

**Lineares Wachstum:**  $f(n) = f(n-1) + d = f(0) + n \cdot d$

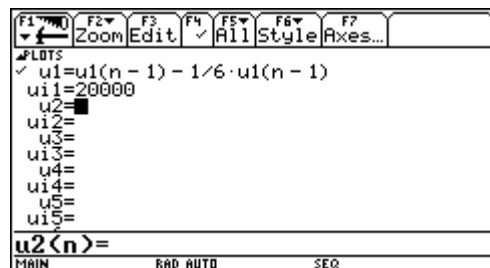
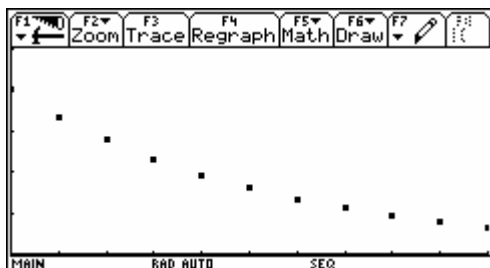
- Bsp.:** Der Buchwert eines Firmenwagens (Neupreis 20 000,- €) sinkt jährlich um 1/8 des Neupreises (= lineare Abschreibung in 8 Jahren).



Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0..10$  /  $x = 0..10$  /  $y = 0..25000$

**Exponentielles Wachstum:**  $f(n) = f(n-1) + r \cdot f(n-1) = f(n-1) \cdot q = f(0) \cdot q^n$

- Bsp.:** Der Listenpreis eines Gebrauchtwagens (Neupreis 20 000,- €) sinkt jährlich um 1/6 seines Zeitwertes.



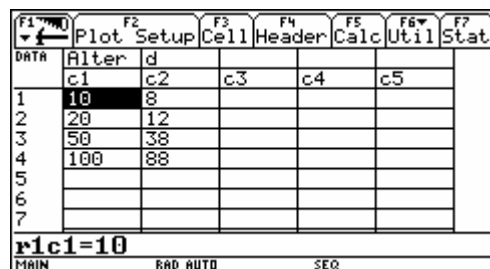
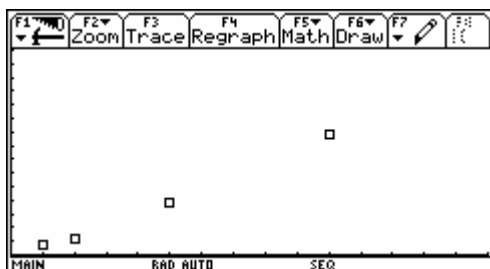
Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0..10$  /  $x = 0..10$  /  $y = 0..25000$

**Logistisches Wachstum:**  $f(n) = f(n-1) + r \cdot f(n-1) \cdot \frac{K - f(n-1)}{K}$

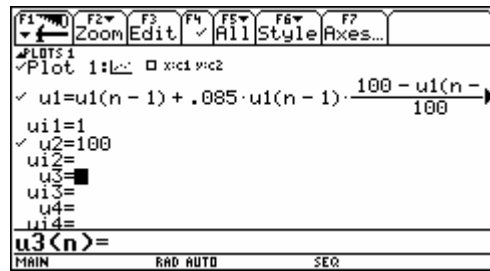
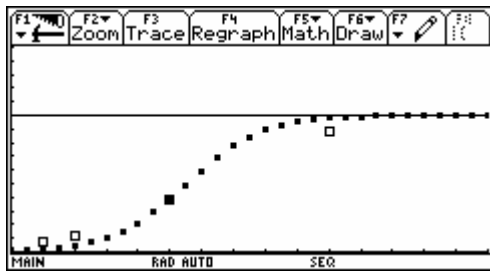
- Bsp.:** Der Durchmesser  $d$  (in cm) einer Fichte hängt von ihrem Alter ab. Es wurden folgende Werte gemessen [Dateneingabe im Data/Matrix Editor]:

Alter in Jahren	10	20	40	50	80	100	120
Durchmesser $d$ in cm	8	12		38		88	

Welchen Durchmesser hat eine 40 / 80 / 120 Jahre alte Fichte?



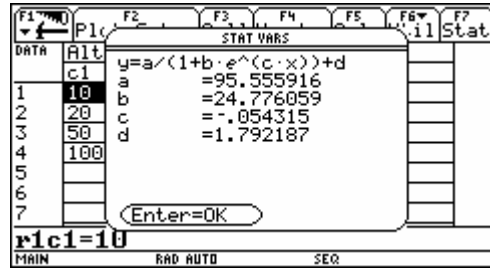
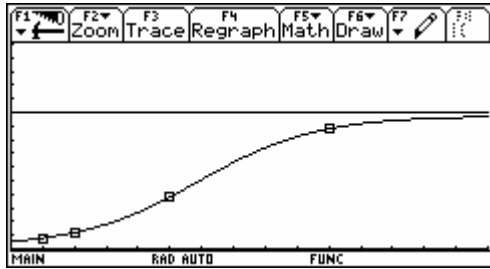
Plot Type = Scatter;  $x = c_1$ ;  $y = c_2$ ; WINDOW:  $n = 0..150$  /  $x = 0..150$  /  $y = 0..150$



Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0 \dots 150$  /  $x = 0 \dots 150$  /  $y = 0 \dots 150$

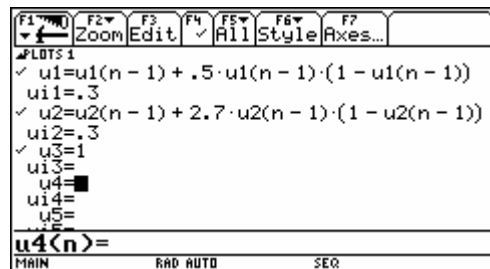
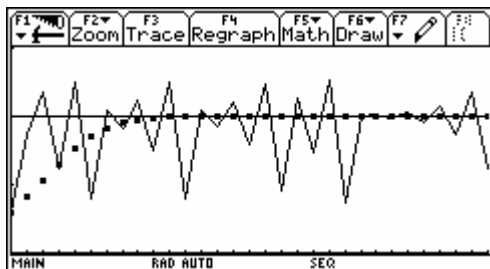
Regression:

[APPS] - Data/Matrix Editor; [F5] Calc - Calculation Type = Logistic;  $x = c1$ ;  $y = c2$ ; Store RegEQ to  $y1(x)$

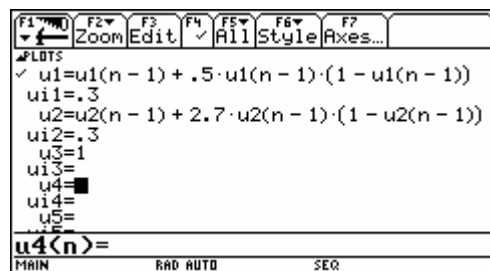
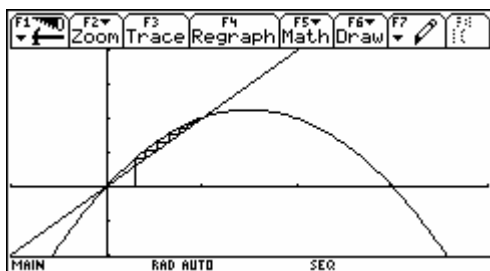


Graph = FUNCTION; WINDOW:  $x = 0 \dots 150$  /  $y = 0 \dots 150$

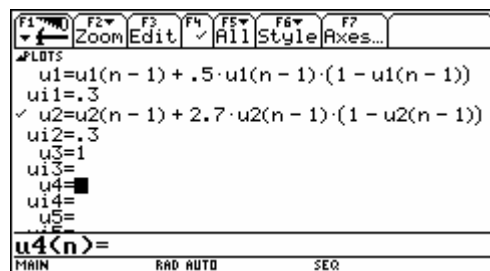
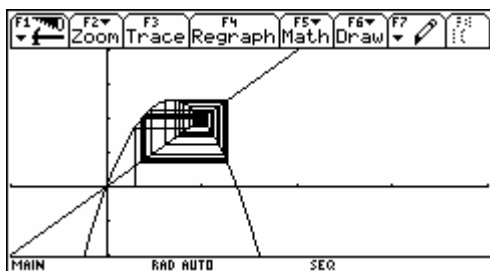
- Achtung:** Hohe Wachstumsraten erzeugen chaotisches Verhalten (nur im diskreten Modell).



Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0 \dots 30$  /  $x = 0 \dots 30$  /  $y = 0 \dots 1.5$ ; [Y=] - [F7] Axes... - Axes = TIME



Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0 \dots 30$  /  $x = -1 \dots 4$  /  $y = -1 \dots 2$ ; [Y=] - [F7] Axes... - Axes = WEB



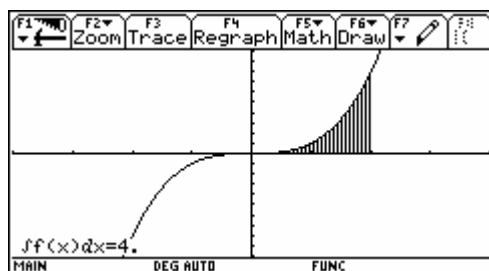
Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0 \dots 30$  /  $x = -1 \dots 4$  /  $y = -1 \dots 2$ ; [Y=] - [F7] Axes... - Axes = WEB

# Arbeitsblatt Analysis

- Berechne:

Nr	Angabe	Eingabe	Ergebnis
1	$f(x) = \tan x; f'(x) =$	<code>d&lt;tan(x),x&gt;</code>	
2	$f(x) = \tan x; f'(0) =$	<code>d&lt;tan(x),x&gt; x=0</code>	
3	$f(x) = \tan x; f''(x) =$	<code>d&lt;tan(x),x,2&gt;</code>	
4	$\frac{\partial}{\partial x}(f(x) \cdot g(x)) =$	<code>d&lt;f(x)*g(x),x&gt;</code>	
5	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) =$	<code>comDenom&lt;d&lt;f(x)/g(x)&gt;,x&gt;&gt;</code>	
6	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} =$	<code>limit&lt;&lt;ln(x+h)-ln(x)&gt;/h,h,0&gt;</code>	
7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$	<code>limit&lt;&lt;1+1/n&gt;^n,n,inf&gt;</code>	
8	$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i =$	<code>Σ&lt;i,i,1,100&gt;</code>	
9	$\sum_{i=1}^n i =$	<code>Σ&lt;i,i,1,n&gt;</code>	
10	$\sum_{i=1}^n i^3 =$	<code>Σ&lt;i^3,i,1,n&gt;</code>	
11	$\left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \sum_{i=1}^n i^3 =$	<code>&lt;x/n&gt;^4*Σ&lt;i^3,i,1,n&gt;</code>	
12	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2 \cdot x^4}{4n^3}\right) =$	<code>limit&lt;&lt;n+1&gt;^2*x^4/(4*n^2),n,inf&gt;</code>	

Erläuterungen zu den Fragen 11 und 12 siehe [Anhang 2](#).



WINDOW: x = -4.4 / y = -10 .. 10

# Arbeitsblatt Integral

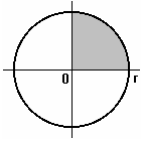
- Berechne folgende Integrale.

Nr	Angabe	Eingabe	Ergebnis
1	$\int \frac{1}{x^2} dx =$	<code>f(1/x^2,x)</code>	
2	$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx =$	<code>f(1/x^2,x,1,2)</code>	
3	$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx =$	<code>f(1/x^2,x,1,∞)</code>	
4	$\int \sin x dx =$ <small>[MODE] - Angle = DEGREE</small>	<code>f(sin(x),x)</code>	
	$\int \sin x dx =$ <small>[MODE] - Angle = RADIAN</small>	<code>f(sin(x),x)</code>	
5	$\int \sin^{-1} x dx =$	<code>f(sin^-1(x),x)</code>	
6	$\int (\sin x)^{-1} dx =$	<code>f(sin(x)^-1,x)</code>	
7	$\int \sinh x dx =$	<code>f(sinh(x),x)</code>	
8	$\int \ln x dx =$	<code>f(ln(x),x)</code>	
9	$\int \log x dx =$	<code>f(log(x),x)</code>	
10	$\int e^{x^2} dx =$	<code>f(e^(x^2),x)</code>	
11	$\int_0^1 e^{x^2} dx =$	<code>f(e^(x^2),x,0,1)</code>	
12	$\int f(x) + g(x) dx =$	<code>f(f(x)+g(x),x)</code>	



# Bestimmtes Integral

1. Berechne die Fläche eines Kreises.



- händisch:

$$A = 4 \cdot \int_0^r y \, dx =$$

$$(\text{eigentlich: } A = 4 \cdot \lim_{x_1 \rightarrow r} \int_0^{x_1} y \, dx)$$

$$= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx =$$

**Substitution:**

$$x = r \cdot \cos t$$

$$\Rightarrow x^2 = r^2 \cdot \cos^2 t$$

$$r^2 - x^2 = r^2 \cdot (1 - \cos^2 t) = r^2 \cdot \sin^2 t$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \cdot \sin t$$

$$\Rightarrow dx = -r \cdot \sin t \, dt$$

$$= -4r^2 \cdot \int \sin^2 t \, dt =$$

**partielle Integration:**

$$\int \underbrace{\sin t}_{u'} \cdot \underbrace{\sin t}_v \, dt =$$

$$= -\cos t \cdot \sin t + \int \cos^2 t \, dt =$$

$$= -\sin t \cdot \cos t + \int 1 - \sin^2 t \, dt =$$

$$= -\sin t \cdot \cos t + t - \int \sin^2 t \, dt$$

$$2 \cdot \int \sin^2 t \, dt = -\sin t \cdot \cos t + t$$

$$\int \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \cdot (\sin t \cdot \cos t - t)$$

$$= 2r^2 \cdot (\sin t \cdot \cos t - t) =$$

**Rücksubstitution:**

$$x = r \cdot \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x}{r} \quad t = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2}} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

$$= 2r^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \cdot \frac{x}{r} - \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) \right) \bigg|_0^r = 2r^2 \cdot \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

- mit Voyage 200: 1. Versuch:  $\blacksquare 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$   $\pi \cdot r \cdot |r|$   
 2. Versuch:  $\blacksquare 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \mid r > 0$   $\pi \cdot r^2$

2. Berechne das Volumen einer Kalotte.

$\sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow f(x)$  Done  
 $\pi \cdot \int_{r-h}^r (f(x))^2 dx$   $\frac{h^2 \cdot \pi \cdot (3 \cdot r - h)}{3}$   
 MAIN RAD AUTO SEQ 2/30

$$\pi * \int \langle (f(x))^2, x, r-h, r \rangle$$

3. Berechne die Mantelfläche eines Drehkegels.

$\frac{r}{h} \cdot x \rightarrow f(x)$  Done  
 $2 \cdot \pi \cdot \int_0^h \left( f(x) \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{d}{dx}(f(x)) \right)^2} \right) dx \mid h > 0$   
 $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$   
 MAIN RAD AUTO SEQ 2/30

$$2 * \pi * \int \langle f(x) * \sqrt{1 + \langle d(f(x), x) \rangle^2}, x, 0, h \rangle \mid h > 0$$

4. Berechne die Bogenlänge einer gespitzten Zykloide.

$r \cdot (t - \sin(t)) \rightarrow x(t)$  Done  
 $r \cdot (1 - \cos(t)) \rightarrow y(t)$  Done  
 $2 \cdot \pi \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \sqrt{\left( \frac{d}{dt}(x(t)) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt}(y(t)) \right)^2} dt \mid r > 0$   
 $8 \cdot r$   
 MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

$$\int \langle \sqrt{\langle d(x(t), t) \rangle^2 + \langle d(y(t), t) \rangle^2}, t, 0, 2 * \pi \rangle \mid r > 0$$

**Achtung:** [MODE] - Angle = RADIAN

5. Berechne die von einer Lemniskate eingeschlossene Fläche.

$\sqrt{2 \cdot a \cdot \cos(2 \cdot \theta)} \rightarrow r(\theta)$  Done  
 $4 \cdot \int_0^{\pi/4} \left( r(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \left( \frac{d}{d\theta}(r(\theta)) \cdot \cos(\theta) - r(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \right) d\theta$   
 $2 \cdot a^2$   
 MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

$$\text{abs} \langle 4 * \int \langle r(\theta) * \sin(\theta) * \langle d(r(\theta), \theta) * \cos(\theta) - r(\theta) * \sin(\theta) \rangle, \theta, 0, \pi/4 \rangle \rangle$$

**Achtung:** [MODE] - Angle = RADIAN

# Stochastik

**Bsp. 1:** Anzahl der schwer verletzten Unfallopfer pro Tag für die letzten 30 Tage in einer bestimmten Stadt

Quelle: Götz, Reichel, Müller, Hanisch: Lehrbuch der Mathematik 7. Wien 2003 (4. Aufl.) <öbv & hpt>. S 242.

Dateneingabe im HOME-Screen:

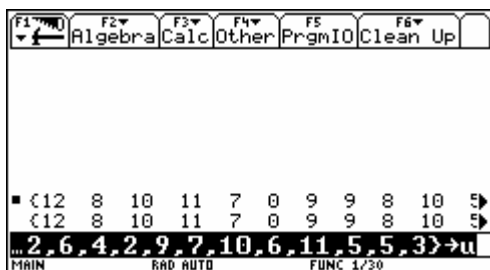
{12, 8, 10, 11, 7, 0, 9, 9, 8, 10, 5, 8, 3, 6, 13, 9, 4, 11, 2, 6, 4, 2, 9, 7, 10, 6, 11, 5, 5, 3} [STO] u

Übernahme in den Data/Matrix Editor:

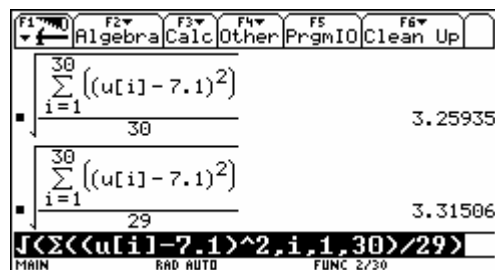
[APPS] - Data/Matrix Editor - 3: New... - c1 = u

Berechnung statistischer Parameter:

[F5] Calc - Calculation Type = OneVar; x = c1

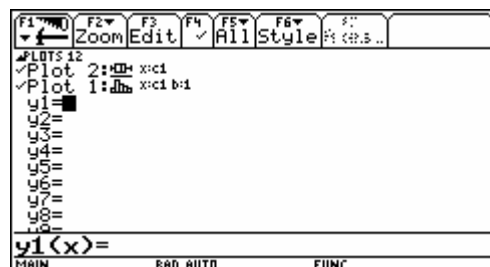
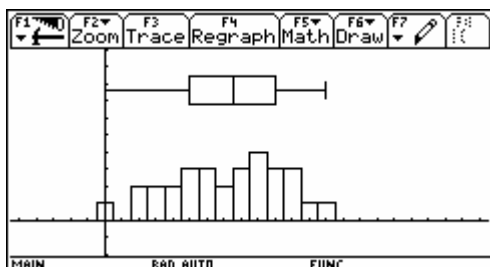


**Hinweis:** die Standardabweichung  $S_x$  wird nach der Formel  $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$  berechnet:



Grafische Darstellung als Histogramm / Box Plot:

[F2] Plot Setup - [F1] Define - Plot Type = Histogram (Hist. Bucket Width = 1) / Box Plot; x = c1



WINDOW (ZoomSqr): x = -5.5..22.5 / y = -2.10

**Bsp. 2:** Die Ergebnisse zweier Schularbeiten einer Klasse mit 30 Schülern sind wie folgt gegeben:

	1	2	3	4	5
1. Schularbeit	11	3	3	6	7
2. Schularbeit	3	9	10	6	2

Vergleiche die Ergebnisse.

Dateneingabe im Data/Matrix Editor:

[APPS] - Data/Matrix Editor - 3: New...

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	Note	Anz_1	Anz_2			
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1	11	3			
2	2	3	9			
3	3	3	10			
4	4	6				
5	5	7	2			
6						
7						
r1c1=1						
MAIN RAD AUTO FUNC						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		
■ noten[1]                    {1 2 3 4 5} ■ noten[2]                    {11 3 3 6 7} ■ (noten[2])[5]                7 <b>noten[2][5]</b>						
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30						

**Hinweis:** Man kann auf einzelne Spalten und Elemente, nicht aber auf einzelne Zeilen zugreifen.

Berechnung statistischer Parameter:

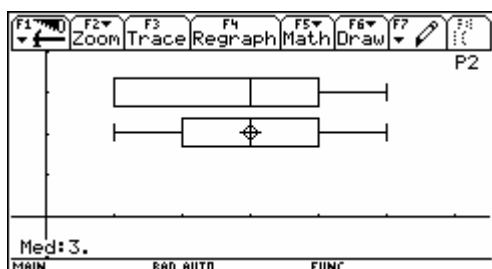
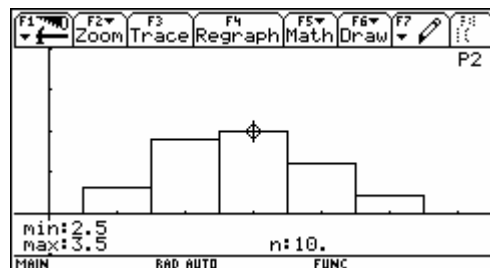
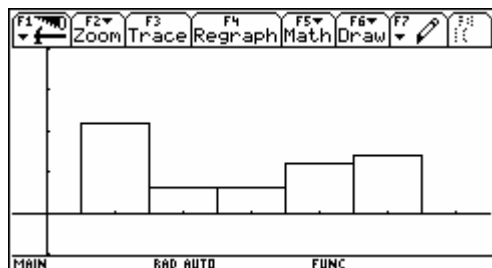
[F5] Calc - Calculation Type = OneVar; x = c1; Use Freq and Categories? = YES; Freq = c2 bzw. c3

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	Note					
	c1					
1	1					
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6						
7						
STAT VARS						
Σx =2.833333						
Σx² =85.						
Σx² =321.						
Sx =1.662639						
nStat =30.						
minX =1.						
q1 =1.						
medStat=3.						
Enter=OK						
r1c1=1						
MAIN RAD AUTO FUNC						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	Note					
	c1					
1	1					
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					
6						
7						
STAT VARS						
Σx =2.833333						
Σx² =85.						
Σx² =275.						
Sx =1.085431						
nStat =30.						
minX =1.						
q1 =2.						
medStat=3.						
Enter=OK						
r1c1=1						
MAIN RAD AUTO FUNC						

Grafische Darstellung als Histogramm / Box Plot:

[F2] Plot Setup - [F1] Define - Plot Type = Histogram (Hist. Bucket Width = 1) / Box Plot; x = c1; Use Freq and Categories? = YES; Freq = c2 bzw. c3



Die Stabhöhen des Histogramms bzw. die relevanten Daten des Box Plots (Median, Quartile, Minimum und Maximum) können mit [F3] Trace abgelesen werden.

WINDOW: x = -0.5,6.5 / y = -5..20

### Bsp. 3: Zusammenhang von Körpergröße und Gewicht

Quelle: Reichel, Müller, Hanisch: Lehrbuch der Mathematik 8. Wien 1993 (2. Aufl.) <öbv & hpt>. S 212.

Dateneingabe im Data/Matrix Editor:

[APPS] - Data/Matrix Editor - 3: New...

Körpergröße : 170 176 165 171 177 167 179 185 175 180  
Gewicht : 68 70 67 78 83 60 77 89 77 76

Regressionsgerade:

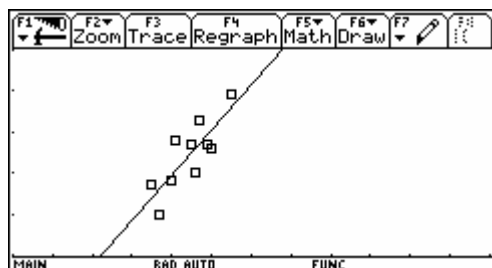
[F5] Calc - Calculation Type = LinReg; x = c1; y = c2; Store RegEQ to y1(x)

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	CM	kg					
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	170	68					
2	176	70					
3	165	67					
4	171	78					
5	177	83					
6	167	60					
7	179	77					

r1c1=170  
MAIN RAD AUTO FUNC

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	CM	kg					
	c1	c2					
1	170	68					
2	176	70					
3	165	67					
4	171	78					
5	177	83					
6	167	60					
7	179	77					

STAT VARS  
y=a·x+b  
a =1.1033  
b =-118.025825  
corr =.815107  
R² =.664399  
Enter=OK  
r1c1=170  
MAIN RAD AUTO FUNC



	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	CM	kg					
	c1	c2					
1	170	68					
2	176	70					
3	165	67					
4	171	78					
5	177	83					
6	167	60					
7	179	77					

STAT VARS  
y=a·x+b  
a =1.1033  
b =-118.025825  
corr =.815107  
R² =.664399  
Enter=OK  
r1c1=170  
MAIN RAD AUTO FUNC

WINDOW: x = 130 .. 250 / y = 50 .. 100

**Hinweis:** Die Regressionsgerade geht stets durch den Schwerpunkt ( $\bar{x}/\bar{y}$ ) der Punktwolke.

# Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Hypergeometrische Verteilung

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$					
$\frac{nCr(n, k) \cdot nCr(n-m, s-k)}{nCr(n, s)} \rightarrow hyp(n, m, s, k)$					
Done					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

**Bsp.:** Berechne die Gewinnchancen für alle Gewinnränge beim österreichischen Lotto „6 aus 45“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nichts zu gewinnen?

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$hyp(45, 6, 6, 3) \quad .022440596$					
$hyp(45, 6, 6, 4) \quad .001364631$					
$hyp(45, 6, 6, 5) \quad .000028729$					
$hyp(45, 6, 6, 5) \cdot 1/39 \quad .000000737$					
$hyp(45, 6, 6, 6) \quad .000000123$					
$hyp(45, 6, 6, 6) \quad \frac{1}{8145060}$					
MAIN RAD AUTO FUNC 6/30					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$1 - \sum_{i=3}^6 hyp(45, 6, 6, i) - hyp(45, 6, 6, 5) \cdot 1/39$					
$.976165185$					
$\sum_{i=0}^2 hyp(45, 6, 6, i) - hyp(45, 6, 6, 5) \cdot 1/39$					
$.976165185$					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

- Binomialverteilung

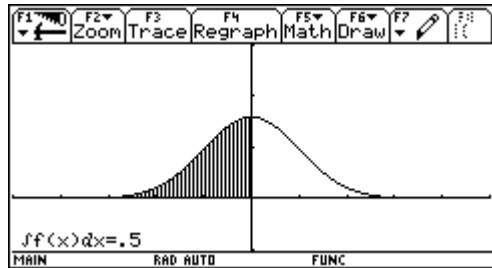
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$nCr(s, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{s-k} \rightarrow bin(p, s, k)$					
Done					
MAIN RAD AUTO FUNC 1/30					

**Bsp.:** Ein Hellseher kann (nach eigenen Angaben) 80% der an ihn gestellten Fragen richtig beantworten.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 80 von 100 Fragen richtig beantwortet?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 80 von 100 Fragen richtig beantwortet?
- Wie viele Fragen müsste er beantworten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens einmal Erfolg zu haben?

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$bin(.8, 100, 80) \quad .0993$					
$\sum_{i=80}^{100} bin(.8, 100, i) \quad .559462$					
$solve(1 - (.2)^x = .95, x) \quad x = 1.86135$					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

- Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$

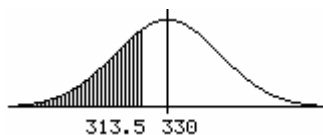


WINDOW:  $x = -5 \dots 5$  /  $y = -0,25 \dots 0,75$

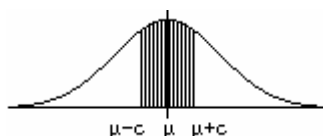
**Bsp.:** Ein bestimmtes Getränk wird in Flaschen mit einem Sollwert von 330 ml abgefüllt, wobei eine technisch bedingte Standardabweichung von 5 ml auftritt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Inhalt einer zufällig ausgewählten Flasche um mindestens 5% unter dem Sollwert liegt?
- Die Getränkefirma garantiert, dass ihre Abfüllanlage zu 98% exakt arbeitet, d.h. der Flascheninhalt um nicht mehr als einen bestimmten Wert  $c$  vom Sollwert **nach oben oder unten** abweicht. Für welche Toleranzgrenzen stimmt diese Aussage?

a)



b)



**Achtung:** / lange Rechenzeit

# Data/Matrix Editor

[APPS] - Data/Matrix Editor

Der Data/Matrix Editor dient zur bequemen Eingabe von Daten (im Sonderfall von Matrizen und Listen), die für weitere Berechnungen und Plots zur Verfügung stehen.

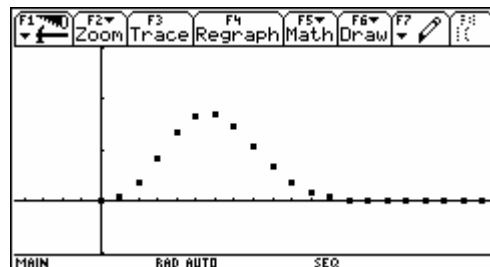
**Bsp. 1:** Ein Baumarkt erhält eine Lieferung Glühbirnen. Erfahrungsgemäß sind 12% aufgrund von Transportschäden oder anderer Ursachen defekt. Im Zuge einer Qualitätskontrolle werden 50 Glühbirnen getestet.  
Welche Anzahl defekter Birnen hat die größte Wahrscheinlichkeit und wie groß ist diese?

**Vorbereitung:**  $nCr(s, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \rightarrow \text{bin}(p, s, k)$

## 1. Eingabe im Funktions-Editor

$u1(n) = \text{bin}(.12, 50, n)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Header	Del	Pol	Int	Pol
n	u1					
0.	.00168					
1.	.01142					
2.	.03817					
3.	.08327					
4.	.13342					
5.	.16738					
6.	.17119					
7.	.14673					
n=0.						
MAIN RAD AUTO SEQ						



Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 0..50$  /  $x = -4.5..20.5$  /  $y = -0.1..0.3$

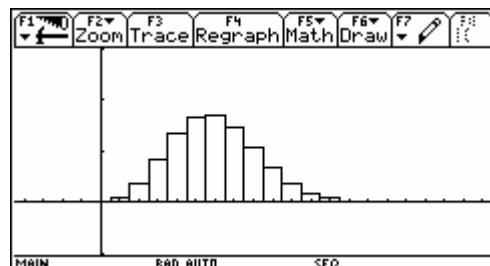
## 2. Eingabe im Data/Matrix Editor

Die Eingabe der Formeln für  $n$  und  $P(n)$  erfolgt in den Spaltenköpfen, die Daten in den Zellen des Data/Matrix Editors werden dann automatisch generiert (Formateinstellung: ☒ F - Auto-calculate = ON):

$c1 = \text{seq}(n, n, 0, 50)$

$c2 = \text{seq}(\text{bin}(.12, 50, n), n, 0, 50)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	n	P(n)				
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	0	.00168				
2	1	.01142				
3	2	.03817				
4	3	.08327				
5	4	.13342				
6	5	.16738				
7	6	.17119				
c1=seq(n,n,0,50)						
MAIN RAD AUTO SEQ						



Plot Type = Histogram (Hist. Bucket Width = 1);  $x = c1$ ; Use Freq and Categories? = YES; Freq =  $c2$   
WINDOW:  $n = 0..50$  /  $x = -4.5..20.5$  /  $y = -0.1..0.3$

**Achtung:** Bei Abbruch einer Berechnung wird Auto-calculate automatisch auf OFF gestellt.



**Bsp. 2 Geburtstagsparadoxon:** In einem Raum sind zufällig  $n$  Personen anwesend ( $n = 1..50$ ).

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben (ohne Berücksichtigung von Schaltjahren und unter der Voraussetzung, dass jeder Tag mit der gleichen Wahrscheinlichkeit als Geburtstag auftritt)?
- Ab welcher Personenzahl übersteigt die Wahrscheinlichkeit 50% / 75% / 90%?

**Überlegung:** Rechnung über das Gegenteil ...

$$1 \text{ Person} : 1 - \frac{365}{365} = 1 - \frac{366-1}{365}$$

$$2 \text{ Personen} : 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = 1 - \frac{366-1}{365} \cdot \frac{366-2}{365}$$

$$3 \text{ Personen} : 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = 1 - \frac{366-1}{365} \cdot \frac{366-2}{365} \cdot \frac{366-3}{365}$$

...

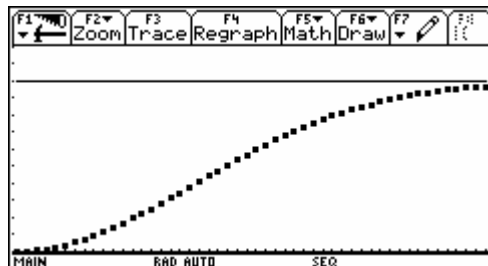
$$n \text{ Personen} : 1 - \frac{366-1}{365} \cdot \frac{366-2}{365} \cdot \frac{366-3}{365} \cdot \dots \cdot \frac{366-n}{365} = 1 - \prod_{k=1}^n \frac{366-k}{365}$$

## 1. Eingabe im Funktions-Editor

**u1<n>=1-Π<(366-k)/365,k,1,n>**

**u2<n>=1**

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Header	Def	Form	Plot	Math	Draw
n	u1	u2					
1.	0.	1.					
2.	.00274	1.					
3.	.0082	1.					
4.	.01636	1.					
5.	.02714	1.					
6.	.04046	1.					
7.	.05624	1.					
8.	.07434	1.					
n=1							
MAIN RAD AUTO SEQ							



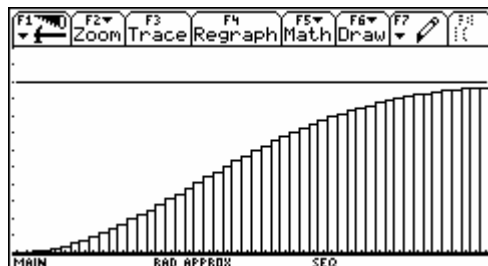
Graph = SEQUENCE; WINDOW:  $n = 1..50$  /  $x = 0.5..50.5$  /  $y = 0..1.2$

## 2. Eingabe im Data/Matrix Editor

**c1=seq(n,n,1,50)**

**c2=seq(1-Π<(366-k)/365,k,1,n>,n,1,50)**

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	n	P(n)				
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1.	0.				
2	2.	.00274				
3	3.	.0082				
4	4.	.01636				
5	5.	.02714				
6	6.	.04046				
7	7.	.05624				
c1=seq(n,n,1,50)						
MAIN RAD APPROX SEQ						



Plot Type = Histogram (Hist. Bucket Width = 1);  $x = c1$ ; Use Freq and Categories? = YES; Freq = c2

WINDOW:  $n = 1..50$  /  $x = 0.5..50.5$  /  $y = 0..1.2$ ; [MODE] - [F2] Page 2 - Exact/Approx = APPROXIMATE

## Tabelle aller Werte 1..50

n	P(n)
1.	0.
2.	.00274
3.	.0082
4.	.01636
5.	.02714
6.	.04046
7.	.05624
8.	.07434
9.	.09462
10.	.11695

n	P(n)
11.	.14114
12.	.16702
13.	.19441
14.	.2231
15.	.2529
16.	.2836
17.	.31501
18.	.34691
19.	.37912
20.	.41144

n	P(n)
21.	.44369
22.	.4757
23.	.5073
24.	.53834
25.	.5687
26.	.59824
27.	.62686
28.	.65446
29.	.68097
30.	.70632

n	P(n)
31.	.73045
32.	.75335
33.	.77497
34.	.79532
35.	.81438
36.	.83218
37.	.84873
38.	.86407
39.	.87822
40.	.89123

n	P(n)
41.	.90315
42.	.91403
43.	.92392
44.	.93289
45.	.94098
46.	.94825
47.	.95477
48.	.9606
49.	.96578
50.	.97037

**Bsp. 3:** Ein Produkt von 1000,- € wird jährlich

- a) um 30,- €
- b) um 3% teurer.

Ermittle die absoluten und relativen Zuwächse beider Folgen, vergleiche die Ergebnisse und stelle die Preisentwicklung grafisch dar.

## Eingabe im Data/Matrix Editor

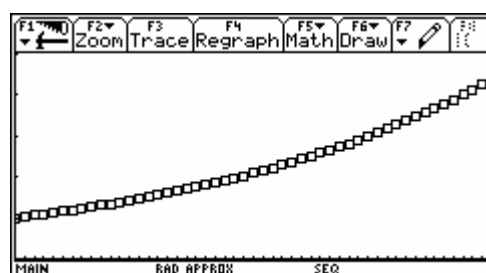
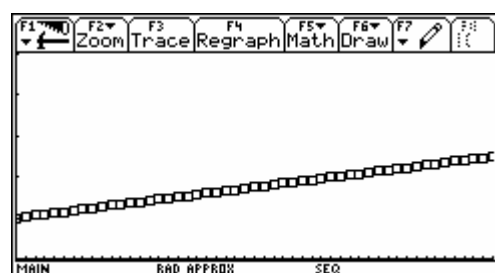
```
c1=seq(n,n,0,50)
c2=seq(1000+30*n,n,0,50)
c3=seq(1000*(1.03)^n,n,0,50)
c4=c3-c2
c5=(c3-c2)/c2*100
```

```
c1=seq(n,n,0,50)
c2=seq(1000*(1.03)^n,n,0,50)
c3=seq(1000*(1.03)^n,n,1,51)
c4=c3-c2
c5=(c3-c2)/c2*100
```

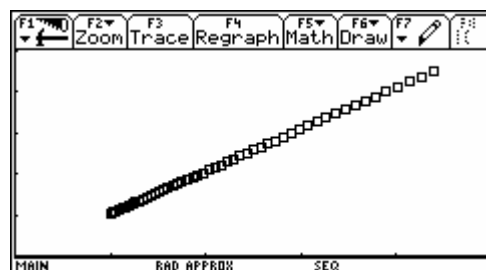
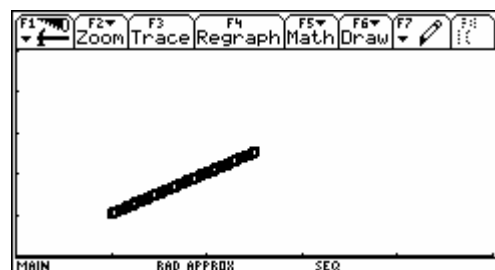
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	n	a(n)	a(n+1)	Δabs	Δrel	
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	0.	1000.	1030.	30.	3.	
2	1.	1030.	1060.	30.	2.9126	
3	2.	1060.	1090.	30.	2.8302	
4	3.	1090.	1120.	30.	2.7523	
5	4.	1120.	1150.	30.	2.6786	
6	5.	1150.	1180.	30.	2.6087	
7	6.	1180.	1210.	30.	2.5424	

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	n	b(n)	b(n+1)	Δabs	Δrel	
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	0.	1000.	1030.	30.	3.	
2	1.	1030.	1060.9	30.9	3.	
3	2.	1060.9	1092.7	31.827	3.	
4	3.	1092.7	1125.5	32.782	3.	
5	4.	1125.5	1159.3	33.765	3.	
6	5.	1159.3	1194.1	34.778	3.	
7	6.	1194.1	1229.9	35.822	3.	

[MODE] - [F2] Page 2 - Exact/Approx = APPROXIMATE



Plot Type = Scatter; x = c1; y = c2; WINDOW: x = 0..50 / y = 0..5000



Plot Type = Scatter; x = c2; y = c3; WINDOW: x = 0..5000 / y = 0..5000

# CellSheet

[APPS] - CellSheet

CellSheet ist eine Tabellenkalkulation mit Anlehnung an Excel. Die Daten eines Tabellenblattes (64 Spalten, 999 Zeilen) können statistisch und grafisch ausgewertet werden.

Die jeweils letzte Aktion lässt sich mit [F4] *Undo...* rückgängig machen.

**Bsp. 1:** Ein Produkt von 1000,- € wird jährlich

- um 30,- €
- um 3% teurer.

Ermittle die absoluten und relativen Zuwächse beider Folgen, vergleiche die Ergebnisse und stelle die Preisentwicklung grafisch dar.

- Zahlen, Variablen und Terme werden direkt eingegeben, Formeln müssen mit [=] beginnen, Texte müssen von [""]...[""] eingeschlossen sein.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	a(n)	Δabs	Δrel			
2							
3							
4							
5							
6							
7							
A1: "n"							
MAIN RAD APPROX FUNC							

- Zelle A2 bzw. B2 markieren und Formeln als Folge eingeben: [F3] *Edit - 4: Sequence - ...* - [ENTER] [ENTER]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	Expr:	n				
2		Var:	n				
3		Low:	0				
4		High:	50				
5		Step:	1				
6		1st Cell:	A2				
7		Direction:	DOWN→				
A2: Enter=OK ESC=CANCEL							
MAIN RAD APPROX FUNC							

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	Expr:	1000+30n				
2		Var:	n				
3		Low:	0				
4		High:	50				
5		Step:	1				
6		1st Cell:	B2				
7		Direction:	DOWN→				
B2: Enter=OK ESC=CANCEL							
MAIN RAD APPROX FUNC							

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	a(n)	Δabs	Δrel			
2		0.					
3		1.					
4		2.					
5		3.					
6		4.					
7		5.					
A2: 0.							
MAIN RAD APPROX FUNC							

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	a(n)	Δabs	Δrel			
2		0.	1000.				
3		1.	1030.				
4		2.	1060.				
5		3.	1090.				
6		4.	1120.				
7		5.	1150.				
B2: 1000.							
MAIN RAD APPROX FUNC							

- Bereich C3:C52 bzw. D3:D52 markieren und erste Formeln eingeben: **[F3] Edit - 2: Select Range ... - [F3] Edit - 3: Fill Range - ... - [ENTER] [ENTER]**

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
Fill Range...							
Initial							
Formula: $=b3-b2$							
Range: C3:C52							
Enter=OK      ESC=CANCEL							
51	49.	2470.					
52	50.	2500.					
C3:C52							
MAIN      RAD   APPRX      FUNC							

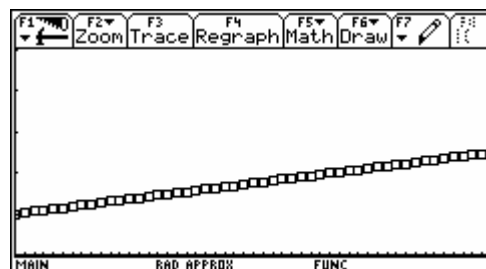
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
Fill Range...							
Initial							
Formula: $=(b3-b2)/b2*100$							
Range: D3:D52							
Enter=OK      ESC=CANCEL							
51	49.	2470.	30.				
52	50.	2500.	30.				
D3:D52							
MAIN      RAD   APPRX      FUNC							

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	a(n)	Δabs	Δrel			
2	0.	1000.					
3	1.	1030.	30.				
4	2.	1060.	30.				
5	3.	1090.	30.				
6	4.	1120.	30.				
7	5.	1150.	30.				
C3: $=b3-b2$							
MAIN      RAD   APPRX      FUNC							

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	A	B	C	D	E	F	
1	n	a(n)	Δabs	Δrel			
2	0.	1000.					
3	1.	1030.	30.	3.			
4	2.	1060.	30.	2.9126			
5	3.	1090.	30.	2.8302			
6	4.	1120.	30.	2.7523			
7	5.	1150.	30.	2.6786			
D3: $=(b3-b2)/b2*100$							
MAIN      RAD   APPRX      FUNC							

**Hinweis:** Das Markieren eines Zellbereichs ist auch mit **[↑] [↻]** möglich.

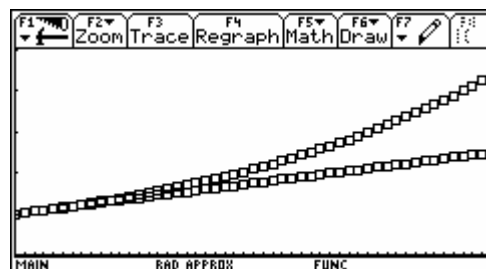
- Grafische Darstellung als Scatter Plot: **[F2] Plot - 1: Plot Setup - [F1] Define - Plot Type = Scatter;**  
xRange = A2:A52; yRange = B2:B52



WINDOW: x = 0..50 / y = 0..5000

- Analog für b)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
pre	C	D	E	F	G	H	
1	Δabs	Δrel	b(n)	Δabs	Δrel		
2			1000.				
3	30.	3.	1030.	30.	3.		
4	30.	2.9126	1060.9	30.9	3.		
5	30.	2.8302	1092.7	31.827	3.		
6	30.	2.7523	1125.5	32.782	3.		
7	30.	2.6786	1159.3	33.765	3.		
G3: $=(e3-e2)/e2*100$							
MAIN      RAD   APPRX      FUNC							



WINDOW: x = 0..50 / y = 0..5000

**Bsp. 2 Zufallszahlen:** Simuliere eine Serie von 10 Würfeln mit einem Würfel. Wie oft wurde 1, 2, ..., 6 geworfen? Experimentiere mit „alternativen Würfeln“.

- Zahlen, Variablen und Terme werden direkt eingegeben, Formeln müssen mit [=] beginnen, Texte müssen von ["]...["] eingeschlossen sein.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

A2: 6

MAIN RAD AUTO FUNC

**Hinweis:** Die Spaltenbreite wurde mit [F3] Edit - 8: Column Format - Col Width verändert.

- Zelle B4 markieren und Formel als Folge eingeben: [F3] Edit - 4: Sequence - ... - [ENTER] [ENTER]  
Bereich C4:C13 markieren und erste Formel eingeben: [F3] Edit - 2: Select Range ... -  
[F3] Edit - 3: Fill Range - ... - [ENTER] [ENTER]

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

B4: 1

MAIN RAD AUTO FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

C4: =rand(\$A\$2)

MAIN RAD AUTO FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

B4: 1

MAIN RAD AUTO FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

C4: =rand(\$A\$2)

MAIN RAD AUTO FUNC

### Hinweise

- Das Markieren eines Zellbereichs ist auch mit [↑] [⊕] möglich.
- Die Funktionstasten, insbesondere [F5] \$ und [F6] Funcs funktionieren nur in der Eingabezeile, nicht innerhalb einer Dialogbox. Das \$-Zeichen dient wie in Excel zur absoluten Adressierung von Zeilen- und / oder Spalten und ist auch als [2nd] [CHAR] 34 verfügbar.
- „Neuer Wurf“ mit [F8] ReCalc.
- Da das Tabellenblatt Formeln mit Zufallszahlen enthält, wird es bei jeder Eingabe neu erstellt. Dies kann durch [F5] F - AutoCalc = NO verhindert werden.

- Indikatortabelle erstellen: Bereich D4:I13 markieren und erste Formel eingeben:

[F3] Edit - 2: Select Range ... - [F3] Edit - 3: Fill Range - =cellIf(\$C4=D\$1,1,0)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

D4: =cellIf(\$C4=D\$1,1,0)

MAIN RAD AUTO FUNC

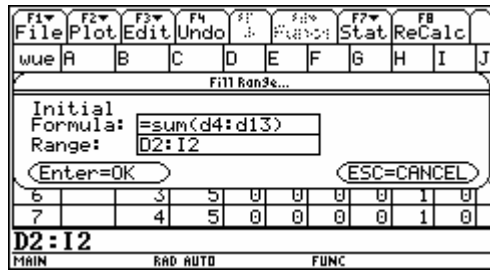
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
wue	A	B	C	D	E	F	G
1	max	n	Wurf	1	2	3	4
2		6					
3							
4							
5							
6							
7							

D4: =cellIf(\$C4=D\$1,1,0)

MAIN RAD AUTO FUNC

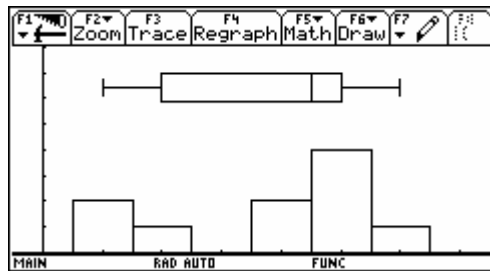
- Auswertung: Bereich D2:I2 markieren und erste Formel eingeben:

**F3** Edit - 3: Fill Range - ...



F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc	
wue	A	B	C	D	E	F	G	H
1	max	n	wurf	1	2	3	4	5
2	6			2	1	0	2	4
3								
4		1	5	0	0	0	0	1
5		2	5	0	0	0	0	1
6		3	2	0	1	0	0	0
7		4	6	0	0	0	0	1

- Grafische Darstellung: **F2** Plot - 1: Plot Setup - **F1** Define - Plot Type = Histogram (Hist. Bucket Width = 1) / Box Plot; xRANGE = D1:I1; Use Freq and Categories? = YES; Freq = D2:I2



WINDOW:  $x = -0.5..7.5$  /  $y = 0..8$

- „Alternative Würfel“:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc	
wue	A	B	C	D	E	F	G	H
1	max	n	wurf	1	2	3	4	5
2	3			1	7	2	0	0
3								
4		1	3	0	0	1	0	0
5		2	2	0	1	0	0	0
6		3	2	0	1	0	0	0
7		4	2	0	1	0	0	0

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc	
wue	A	B	C	D	E	F	G	H
1	max	n	wurf	1	2	3	4	5
2	12			1	0	1	0	2
3								
4		1	7	0	0	0	0	0
5		2	7	0	0	0	0	0
6		3	5	0	0	0	0	1
7		4	10	0	0	0	0	0

# Text Editor

## APPS - Text Editor

Der Text Editor dient zur Eingabe von Texten (Notizen, „Schwindelzettel“, ...), aber auch von ausführbaren Befehlen ( $\text{F2}$  *Command* - 1: Command), die gegebenenfalls ergänzt und mit  $\text{F4}$  *Execute* abgearbeitet werden können.

**Bsp.:** Kurvendiskussion für rationale Funktionen am Beispiel der Funktion  $f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{x+2}$

- Für die Abarbeitung empfiehlt es sich, den Schirm in Text- und Home-Screen zu teilen:  
 $\text{MODE}$  -  $\text{F2}$  *Page 2* - Split Screen = TOP-BOTTOM, Split 1 App = Text Editor, Split 2 App = Home  
*(Wechsel des aktiven Fensters mit  $\text{2nd}$   $\text{[⇄]}$ )*
- Für die Betrachtung des Graphen dagegen sollte die Teilung rückgängig gemacht werden:  
 $\text{MODE}$  -  $\text{F2}$  *Page 2* - Split Screen = FULL, Split 1 App = Graph
- Die Grenzen des Grafik-Fensters ( $\text{[◀▶]}$  *[WINDOW]*) wurden so gewählt, dass ganzzahlige Punkte tatsächlich berechnet werden (insbesondere  $x = -2$ ) und im vorliegenden Bsp. somit keine Verbindungen als „falsche Asymptoten“ auftreten.

```

F1  F2  F3  F4  F5
Command View Execute Find...

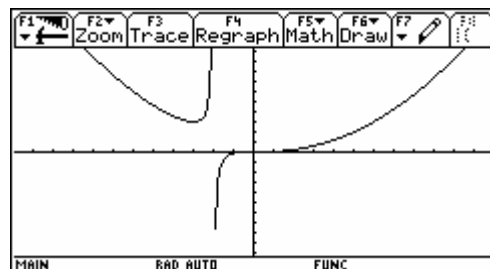
:Kurvendiskussion - f(x) rational
:-----
:0. Funktion definieren
C:Define f(x)=
:1. Definitionsmenge bzw. lotrechte
  Asymptoten: Nenner = 0
C:Zeros(GetDenom(f(x)),x)
:2. Andere Asymptoten:
  Polynomdivision
C:Expand(f(x))
:3. Nullstellen: f(x)=0
C:Exp▶List(Solve(f(x)=0,x),x)
:4. Lokale Extrema: f'=0
C:Exp▶List(Solve(d(f(x),x)=0,x)→1e
  Zugehörige Funktionswerte
C:f(x)|x=1e
  Probe: 2. Ableitung ≠ 0
C:Sign(d(f(x),x,2)|x=1e
:5. Wendepunkte
C:Exp▶List(Solve(d(f(x),x,2)=0,x)→wp
  Zugehörige Funktionswerte
C:f(x)|x=wp
  Probe: 3. Ableitung ≠ 0
C:Sign(d(f(x),x,3)|x=wp
:6. Graph zeichnen
C:Graph f(x)
  ... und wieder löschen
C:ClrGraph
  
```

```

F1  F2  F3  F4  F5
Command View Execute Find...

:0. Funktion definieren
C:Define f(x)=(1/9)*(x^3/(x+2))

:Define f(x)=1/9 * x^3 / x+2      Done
:zeros(getDenom(f(x)),x)        (-2)
:expand(f(x))                   -8 / 9 * (x+2) + x^2 / 9 - 2 * x / 9 + 4 / 9
:exp▶list(solve(f(x)=0,x),x)     (0)
:exp▶list(solve(d(f(x))=0,x)→1e  (-3 0)
:                                (3 0)
:f(x)|x=1e                      (3 0)
:sign(d^2(f(x))|x=1e            (1 sign(0))
:exp▶list(solve(d^2(f(x))=0,x)→wp  (0)
:f(x)|x=wp                      (0)
:sign(d^3(f(x))|x=wp            (1)
:Graph f(x)                     Done
:ClrGraph                       Done
  
```



WINDOW:  $x = -11.9 \dots 11.9$  /  $y = -10.2 \dots 10.2$  /  $xres = 1$

# Program Editor

[APPS] - Program Editor

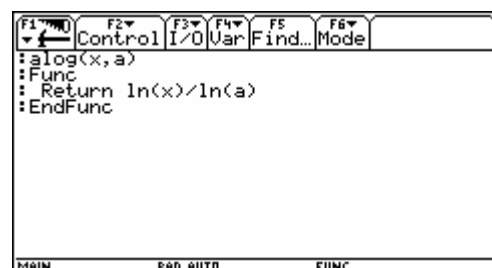
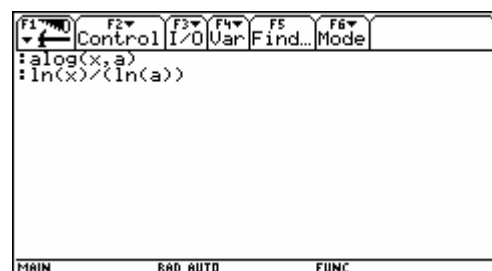
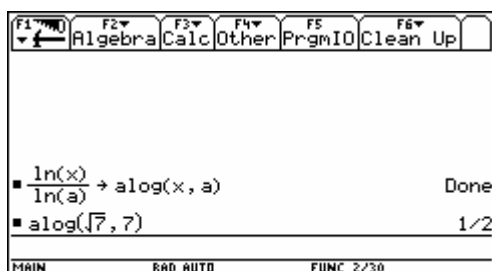
Mit dem Program Editor lassen sich Programme oder Funktionen erstellen und bearbeiten.

- Der Aufruf von Programmen erfolgt im HOME-Screen oder aus anderen Programmen heraus durch `name(parameter)` bzw. `name()`. Auch Unterprogramme innerhalb eines Programms sind möglich.

```
:name(parameter)
:Prgm
:
:   Local constname,varname,...
:
:   ● Hauptprogramm
:   C1rIO
:   ...
:EndPrgm
```

```
:name(parameter)
:Prgm
:
:   Local constname,varname,...
:
:   ● lokales Unterprogramm
:   Local upname
:   Define upname(parameter)=Prgm
:   ...
:   EndPrgm
:
:   ● lokale Funktion
:   Local fname
:   Define fname(parameter)=Func
:   ...
:   EndFunc
:
:   ● Hauptprogramm
:   C1rIO
:   ...
:EndPrgm
```

- Die Programmausgabe erfolgt auf einem eigenen Schirm, der aus dem HOME-Screen mit [F5] *PrgmIO* erreichbar ist. Die Rückkehr aus diesem Schirm kann ebenfalls durch [F5] *PrgmIO* oder [ESC] oder [2nd] [QUIT] oder [♦] [HOME] erfolgen.
- „Programme“ können auch als Folge ausführbarer Befehle im Text Editor erstellt werden.
- Funktionen führen Berechnungen aus, deren Ergebnis dargestellt bzw. in Terme eingebaut werden kann. Einfache Funktionen können auch im HOME-Screen definiert werden, sie werden dann im Program Editor „ohne Struktur“ (Func - EndFunc) dargestellt.





### Bsp. 1 Ermittlung des Wochentags: Algorithmus von Christian Zeller (1824 - 1899)

Keine Überprüfung auf Korrektheit der Eingaben.

#### Variante A: Dateneingabe mit INPUT

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:wohtag()
:Prgm
:
:  Local tag,monat,jahr,y,c,wtag,tlist
:  <"Samstag","Sonntag","Montag","Dienst
:  ag","Mittwoch","Donnerstag","Freitag">→
:  tlist
:
:  ClrIO
:  Disp "Wochentagsberechnung (ab 15.10.
:  1582)"
:  Disp "-----"
:
:  Input "Tag (1..31): ",tag
:  Input "Monat (1..12): ",monat
:  Input "Jahr (4stellig): ",jahr
:
:  If monat<3 Then
:    monat+12→monat
:    jahr-1→jahr
:  EndIf
:  mod(jahr,100)→y
:  floor(jahr/100)→c
:
:  mod(tag+floor((monat+1)*13/5)+y+floor
:  (y/4)+floor(c/4)-2*c,7)+1→wtag
:
:  Disp tlist[wtag]
:EndPrgm
MAIN RAD AUTO FUNC
```

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
:wohtag()
MAIN RAD AUTO FUNC 0/30
```

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Wochentagsberechnung (ab 15.10.1582)
-----
Tag (1..31):
1
Monat (1..12):
1
Jahr (4stellig):
2001
Montag
MAIN RAD AUTO FUNC 1/30
```

#### Variante B: Dateneingabe mit Dialogbox

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:wohtag()
:Prgm
:
:  Local tstr,mstr,jstr,tag,monat,jahr,y
:  ,c,wtag,tlist,taste
:  <"Samstag","Sonntag","Montag","Dienst
:  ag","Mittwoch","Donnerstag","Freitag">→
:  tlist
:
:  ClrIO
:  Disp "Wochentagsberechnung (ab 15.10.
:  1582)"
:  Disp "-----"
:
:  Disp "[Esc] = Ende"
:  Disp " "
:
:  0→taste
:  While taste#264
:    Dialog
:      Title "Datum"
:      Text "Gregorianischer Kalender"
:      Text "ab 15.10.1582"
:      Request "Tag (1..31)",tstr
:      Request "Monat (1..12)",mstr
:      Request "Jahr (4stellig)",jstr
:    EndDialog
:
:    expr(tstr)→tag
:    expr(mstr)→monat
:    expr(jstr)→jahr
:
:    If monat<3 Then
:      monat+12→monat
:      jahr-1→jahr
:    EndIf
:    mod(jahr,100)→y
:    floor(jahr/100)→c
:
:    mod(tag+floor((monat+1)*13/5)+y+flo
:    or(y/4)+floor(c/4)-2*c,7)+1→wtag
:
:    Disp "Der "&tstr&","&mstr&","&jstr&
:    " war ein "&tlist[wtag]&". "
:
:    0→taste
:    While taste=0
:      getKey()→taste
:    EndWhile
:  EndWhile
:EndPrgm
MAIN RAD AUTO FUNC
```

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
:wohtag()
MAIN RAD AUTO FUNC 0/30
```

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Datum
Gregorianischer Kalender
ab 15.10.1582
Tag (1..31): 1
Monat (1..12): 1
Jahr (4stellig): 2001
[Enter=OK] [ESC=CANCEL]
MAIN RAD AUTO FUNC 0/30
```

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Wochentagsberechnung (ab 15.10.1582)
-----
[Esc] = Ende
Der 1.1.2001 war ein Montag.
Der 2.1.2001 war ein Dienstag.
MAIN RAD AUTO FUNC 1/30
```

**Bsp. 2:** Temperaturmessung mit CBL / CBL2 (-20° C..125° C)

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Control I/O Var Find... Mode
:temp()
:Prgm
:  Local chnr,op,post,zeit,anz,typ
:  1→chnr @ analoger Kanal CH1
:  10→op  @ Operation10=TemperaturMess
:  0→post  @ nichts nach Messung
:  .1→zeit @ Messung alle .1 Sekunden
:  100→anz @ Anzahl der Messungen
:  1→typ   @ manueller Start (Trigger)
:  @ All Clear (alte Daten löschen)
:  Send {0}
:  @ Channel Setup
:  Send {1,chnr,op,post}
:  @ Sample and Trigger Setup
:  Send {3,zeit,anz,typ}
:  ClrIO
:  Disp "<Trigger> drücken ..."
:  Get tlist1
:  Disp ""
:  Disp "Fertig!"
:  Disp ""
:  Disp "Daten in tlist1 gespeichert."
:EndPrgm
MAIN RAD AUTO FUNC
```

**Hinweis für CBL:** erlaubte Werte für

- Zeit : 0,0001..0,2 bzw. 0,25..16000 (in Schritten von 0,25) [ 0 = externe Uhr ]
- Anz : 1..512 [ -1 = Real Time ]

# Numeric Solver

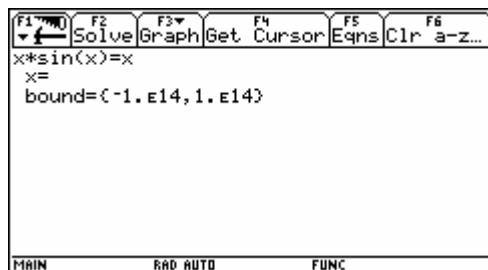
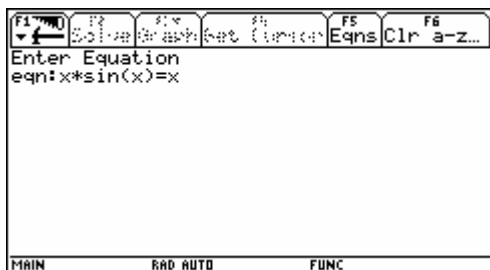
## [APPS] - Numeric Solver

Der Numeric Solver dient zur (vergleichsweise raschen) numerischen Lösung von Gleichungen mit oder ohne vorgegebenem Startwert. Die gegebene Gleichung kann zunächst auch mehrere Variable enthalten, die nach der Eingabe (alle bis auf eine) mit Werten belegt werden können.

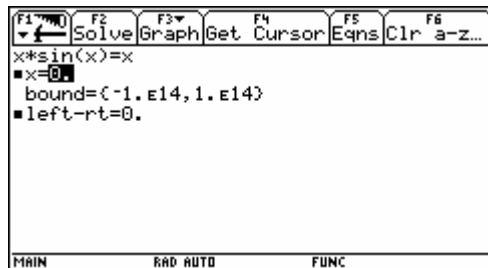
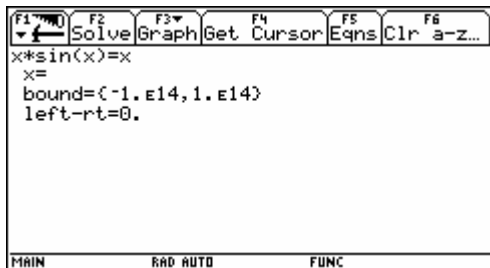
- [F5] Eqns liefert eine Liste bereits eingegebener Gleichungen (Anzahl je nach Formateinstellung, Standard: ♦ F - Last Eqns History = 11), einzelne Gleichungen lassen sich auch mit [F1] - 2: Save Copy as... oder ♦ S speichern und mit [F1] - Open... oder ♦ O wieder öffnen.

**Bsp.:** Fixpunkte der Funktion  $f(x) = x \cdot \sin(x)$

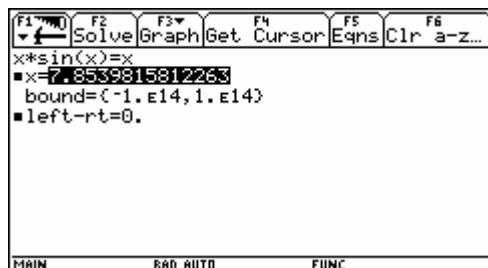
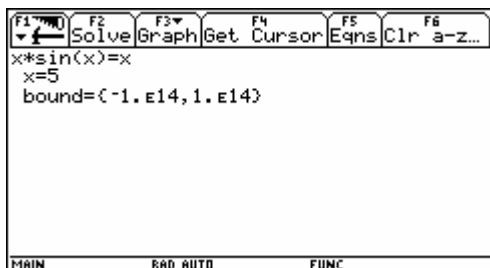
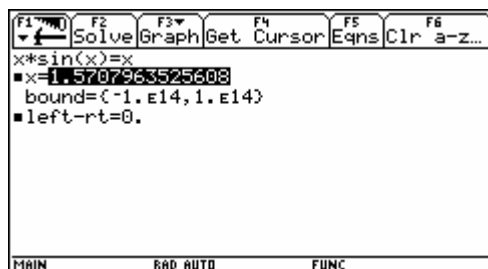
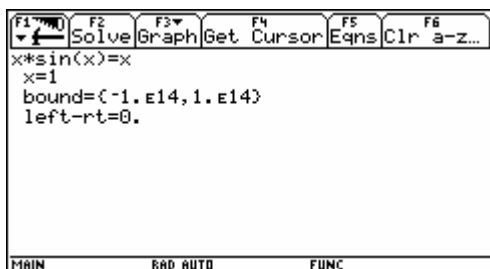
Gleichung eingeben, Eingabe mit  $\odot$  oder [ENTER] beenden - vorgegebene Grenzen akzeptieren



- Lösung ohne vorgegebenen Startwert: [F2] Solve



- Lösung mit vorgegebenen Startwert:  $x = \text{Startwert}$  eingeben - [F2] Solve



- Belegte Variable löschen: DelVar x

# Cabri Geometrie

**APPS** - Cabri Geometry

Mit Cabri lassen sich geometrische Objekte bzw. Makros erstellen und animieren.

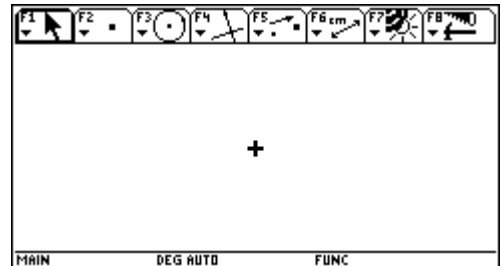
Die jeweils letzte Aktion lässt sich mit **F8** - D: Undo oder mit **◀** Z rückgängig machen. Einzelne Objekte können auch mit **ENTER** gewählt und mit **↵** gelöscht werden.

**Bsp.:** Satz von Thales

- **Neue Geometrie-Sitzung eröffnen und mit „thales“ bezeichnen:**

**APPS** - Cabri Geometry - 3: New... - ... - **ENTER** **ENTER**

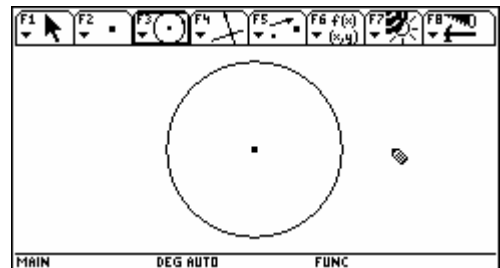
Es erscheint ein leeres Geometriefenster - je nach Formateinstellung (**◀** F) mit oder ohne Koordinatensystem, Gitterpunkten ...



- **Kreis zeichnen:**

**F3** - 1: Circle;

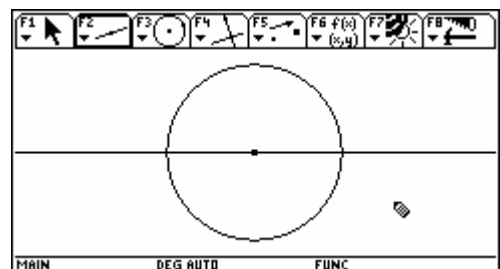
Mittelpunkt mit **ENTER** wählen, Kreis mit **⊕** aufziehen und mit **ENTER** bestätigen.



- **Durchmesser konstruieren:**

**F2** - 4: Line;

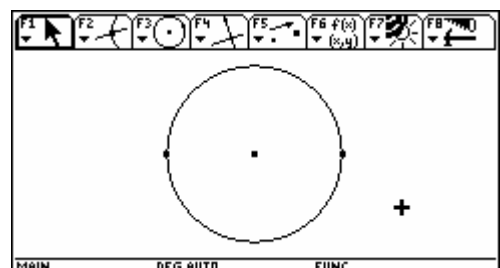
Mittelpunkt ansteuern (THRU THIS POINT), mit **ENTER** bestätigen;  
Linie mit **⊕** aufziehen, mit **ENTER** bestätigen.



Gerade mit Kreis schneiden: **F2** - 3: Intersection Point;  
Gerade ansteuern (THIS LINE), mit **ENTER** bestätigen;  
Kreis ansteuern (THIS CIRCLE), mit **ENTER** bestätigen.

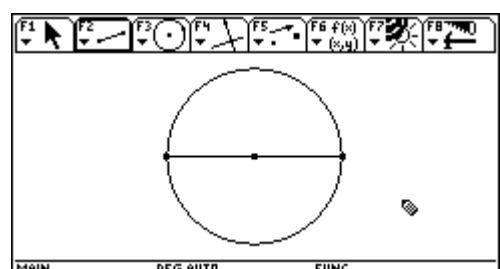
Gerade verstecken: **F7** - 1: Hide / Show;

Gerade ansteuern (THIS LINE), mit **ENTER** bestätigen und mit **ESC** verstecken.



Durchmesser zeichnen: **F2** - 5: Segment;

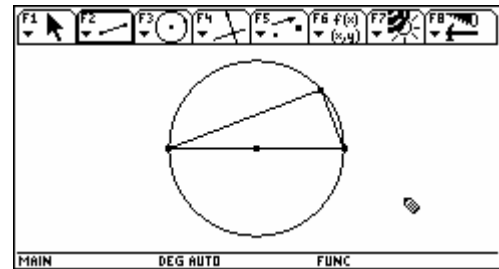
Anfangspunkt ansteuern (THIS POINT), mit **ENTER** bestätigen;  
Endpunkt ansteuern (THIS POINT), mit **ENTER** bestätigen.



- Punkt am Kreis zeichnen und mit Durchmesserendpunkten verbinden:**

[F2] - 2: Point on Object;  
Gewünschten Punkt ansteuern (ON THIS CIRCLE), mit [ENTER] bestätigen.

Verbindungen zeichnen: [F2] - 5: Segment;  
Anfangspunkt ansteuern (THIS POINT), mit [ENTER] bestätigen;  
Endpunkt ansteuern (THIS POINT), mit [ENTER] bestätigen.



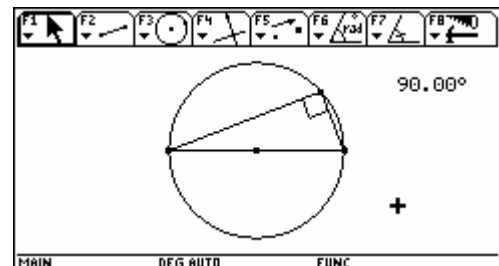
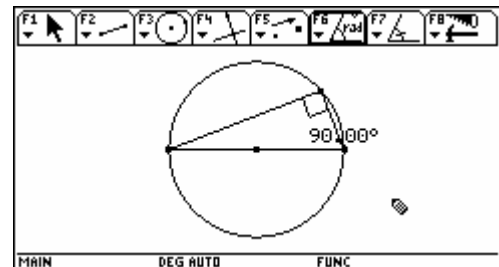
- Winkel und Koordinaten des Scheitels messen:**

Winkel markieren: [F7] - 7: Mark Angle;  
Drei Punkte in „richtiger“ Reihenfolge ansteuern (Scheitel als 2. Punkt) und jeweils mit [ENTER] bestätigen.  
Es erscheint das Symbol für einen rechten Winkel.

Winkel messen: [F6] - 3: Angle;  
Drei Punkte in „richtiger“ Reihenfolge oder Winkelsymbol ansteuern (THIS MARK bzw. THIS ANGLE) und mit [ENTER] bestätigen.

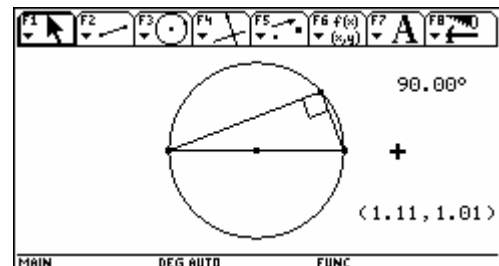
Häufig wird das Messergebnis an einer ungünstigen Stelle angezeigt, es lässt sich aber leicht verschieben:

[F1] - 1: Pointer;  
Messergebnis ansteuern (THIS NUMBER) und mit [ENTER] an die gewünschte Stelle bewegen.



Koordinaten messen: [F6] - 5: Equation & Coordinates;  
Winkelscheitel ansteuern (COORDINATES OF THIS POINT) und mit [ENTER] bestätigen.

[F1] - 1: Pointer;  
Messergebnis ansteuern (THIS TEXT) und mit [ENTER] an die gewünschte Stelle bewegen.



- Punkt am Kreis bewegen:**

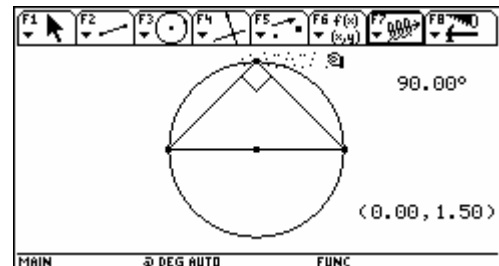
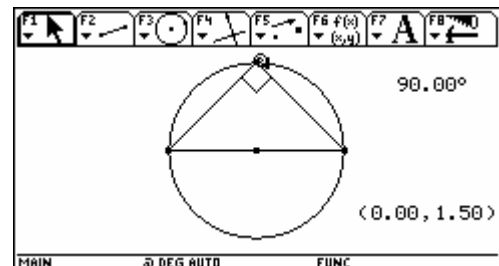
Manuelle Bewegung:

Winkelscheitel ansteuern (THIS POINT) und mit [ENTER] bewegen;  
der Punkt bleibt dabei am Kreis, alle Messwerte werden laufend aktualisiert.

Während sich die Punktkoordinaten ständig ändern, bleibt der Winkel konstant 90°.

Animierte Bewegung:

[F7] - 3: Animation;  
Winkelscheitel ansteuern (THIS POINT), mit [ENTER] die „Feder“ in die Gegenrichtung der beabsichtigten Bewegung ziehen und loslassen. Die Animation kann jederzeit mit [ENTER] unterbrochen und ebenso mit [ENTER] wieder fortgesetzt werden.



# Das Geometrie-Menü des Voyage 200

## Ein kleines Vokabelheft



**Hinweis:** Sprachumstellung mit **[MODE]** - **[F3]** *Page 3* - Language = DEUTSCH

F4	1: Perpendicular Line	1: Senkrechte [Normale]
	2: Parallel Line	2: Parallele
	3: Midpoint	3: Mittelpunkt
	4: Perpendicular Bisector	4: Mittelsenkrechte [Streckensymmetrale]
	5: Angle Bisector	5: Winkelhalbierende [Winkelsymmetrale]
	6: Macro Construction 1: Execute Macro 2: Initial Objects 3: Final Objects 4: Define Macro	6: Makrokonstruktion 1: Makro ausführen 2: Startobjekte 3: Zielobjekte 4: Definiere Makro
	7: Vector Sum	7: Vektorsumme
	8: Compass	8: Zirkel
	9: Measurement Transfer	9: Maß übertragen
	A: Locus	A: Ortslinie
	B: Redefine Object	B: Objekt neu definieren



<b>F5</b>	1: Translation	1: Parallelverschiebung
	2: Rotation	2: Drehung
	3: Dilation	3: Streckung
	4: Reflection	4: Geradenspiegelung
	5: Symmetry	5: Punktspiegelung
	6: Inverse	6: Kreisspiegelung



<b>F6</b>	1: Distance & Length	1: Entfernung und Länge
	2: Area	2: Fläche
	3: Angle	3: Winkel
	4: Slope	4: Steigung
	5: Equation & Coordinates	5: Gleichung und Koordinaten
	6: Calculate	6: Berechnen
	7: Collect Data 1: Store Data 2: Define Entry	7: Daten sammeln 1: Daten speichern 2: Eingabe
	8: Check Property 1: Collinear 2: Parallel 3: Perpendicular 4: Member 5: Equidistant	8: Lagebeziehung prüfen 1: Kollinear 2: Parallel 3: Senkrecht [Normal] 4: Element 5: Entfernungsgleich



<b>F7</b>	1: Hide / Show	1: Ausblenden / Zeigen
	2: Trace On / Off	2: Spur ein / aus
	3: Animation	3: Animation
	4: Label	4: Objektnamen
	5: Comment	5: Text
	6: Numerical Edit	6: Numerische Eingabe
	7: Mark Angle	7: Winkelmarkierung
	8: Thick	8: Liniendicke
	9: Dotted	9: Punktiert
	A: Units	A: Einheit



<b>F8</b>	1: Open...	1: Öffnen...
	2: Save Copy As...	2: Kopie speichern als...
	3: New...	3: Neu...
	4: Cut	4: Ausschneiden
	5: Copy	5: Kopieren
	6: Paste	6: Einfügen
	7: Delete	7: Löschen
	8: Clear All	8: Alles löschen
	9: Format...	9: Format...
	A: Show Page	A: Seite anzeigen
	B: Data View	B: Daten betrachten
	C: Clear Data View	C: Datenanzeige löschen
	D: Undo	D: Rückgängig
	E: About...	E: Info...

# Geometer's Sketchpad Geometrie

[APPS] - The Geometer's Sketchpad

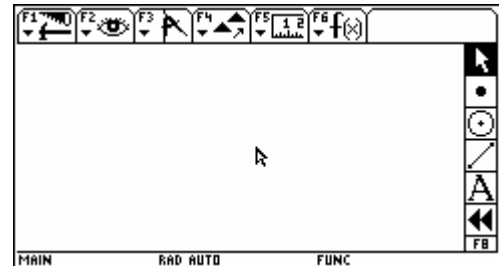
Mit Sketchpad lassen sich geometrische Objekte erstellen und animieren.  
Die jeweils letzte Aktion lässt sich mit [F1] - 1: Undo oder mit [↩] Z rückgängig machen.

**Bsp.: Satz von Thales**



- **Neue Geometrie-Sitzung eröffnen:**

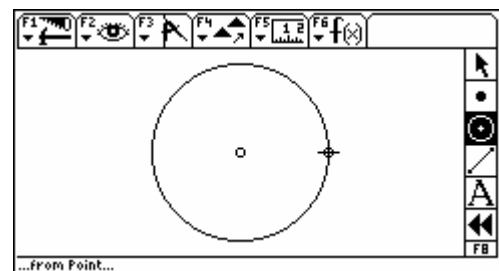
[APPS] - The Geometer's Sketchpad

Es erscheint ein leeres Geometriefenster.




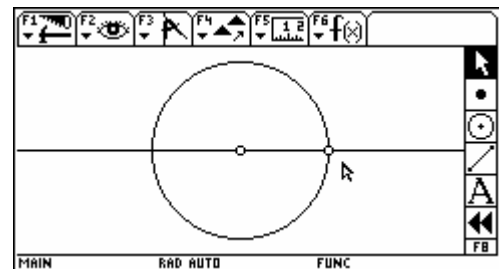
- **Kreis zeichnen:**

Mit [F8] -  das Kreiswerkzeug wählen;  
Mittelpunkt mit [ENTER] wählen, Kreis mit  aufziehen und  
mit [ENTER] - [ENTER] bestätigen.



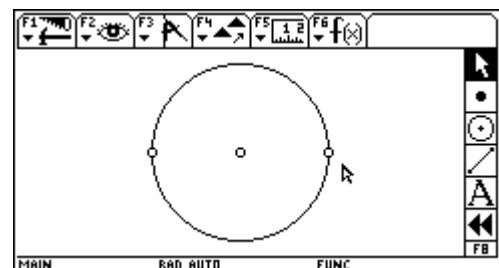
- **Durchmesser konstruieren:**

Mit [F8] -  oder [ESC] das Pointerwerkzeug wählen;  
Mittelpunkt und Kreispunkt ansteuern und mit [ENTER]  
markieren; Gerade mit [F3] - 6: Line zeichnen, mit [ENTER]  
bestätigen.

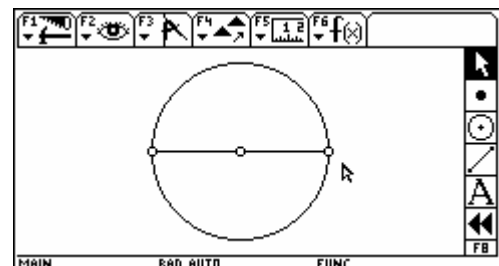


Gerade mit Kreis schneiden: Kreis und Gerade  
ansteuern und mit [ENTER] markieren; Schnittpunkte mit  
[F3] - 3: Intersection konstruieren, mit [ENTER] bestätigen.

Gerade verstecken: Gerade ansteuern, mit [ENTER]  
markieren, mit [F2] - 1: Hide Line verstecken.



Durchmesser zeichnen: Schnittpunkte ansteuern und mit  
[ENTER] markieren; Durchmesser mit [F3] - 4: Segment  
zeichnen, mit [ENTER] bestätigen.

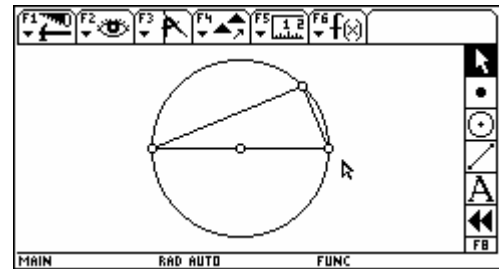




- **Punkt am Kreis zeichnen und mit Durchmesserendpunkten verbinden:**

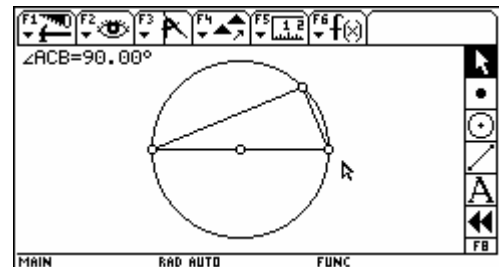
Kreis ansteuern und mit **[ENTER]** markieren; Kreispunkt mit **[F3]** - 1: Point on Circle konstruieren, mit **[ENTER]** bestätigen. Kreispunkt mit **[F1]** an gewünschte Stelle bewegen.

Endpunkte ansteuern und mit **[ENTER]** markieren; Verbindungen mit **[F3]** - 4: Segment zeichnen, mit **[ENTER]** bestätigen.



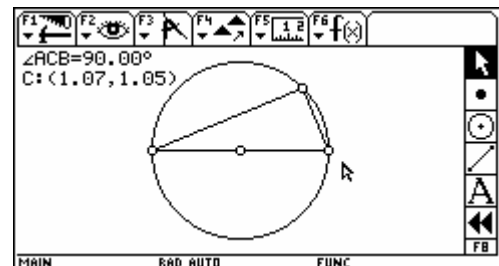
- **Winkel und Koordinaten des Scheitels messen:**

Winkel messen: 3 Punkte in „richtiger“ Reihenfolge (Scheitel als 2. Punkt) ansteuern und mit **[ENTER]** markieren; Wahl des Winkels mit **[F4]** - 3: Mark Angle überprüfen; Winkelmessung mit **[F5]** - 5: Angle anzeigen, mit **[ENTER]** bestätigen.



Koordinaten messen: Scheitel ansteuern und mit **[ENTER]** markieren; Koordinaten mit **[F5]** - D: >Analytic - 1: Coordinates anzeigen, mit **[ENTER]** bestätigen.

Dabei wird auch das Koordinatensystem eingeblendet, seine Elemente (Achsen, Einheitspunkt, Gitterpunkte) können einzeln mit **[ENTER]** markiert und mit **[F2]** - 1: Hide ... versteckt werden, die Gitterpunkte auch mit **[F6]** - 4: Hide Grid.

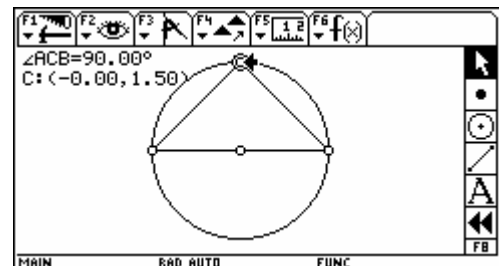


- **Punkt am Kreis bewegen:**

Manuelle Bewegung:

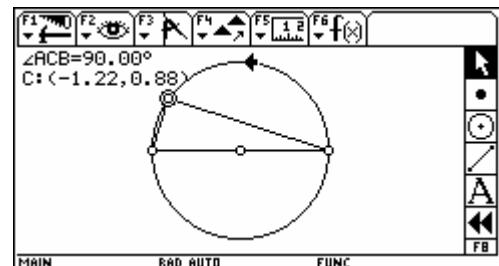
Winkelscheitel ansteuern und mit **[F1]** bewegen; der Punkt bleibt dabei am Kreis, alle Messwerte werden laufend aktualisiert.

Während sich die Punktkoordinaten ständig ändern, bleibt der Winkel konstant 90°.



Animierte Bewegung:

Bewegung des markierten Winkelscheitels mit **[F2]** - 8: Animate Point oder mit **[F4]** U starten und mit **[F2]** - A: Stop Animation oder mit **[F4]** . stoppen.



# Datenübertragung

## Rechner ↔ Rechner

### 1. Verbindungskabel an beide Rechner anschließen



### 2. Empfänger vorbereiten

[2nd] [VAR-LINK] - [F3] Link - 2: Receive



In der Statuszeile erscheinen die Meldungen VAR-LINK: WAITING TO RECEIVE sowie BUSY

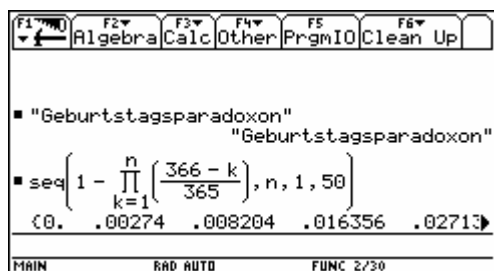
### 3. Senden

[2nd] [VAR-LINK] - gewünschte Variable mit [F3] und [F4] wählen (Flash Applications mit [F7] - [F3] und [F4]) - [F3] Link - 1: Send bzw. 3: Send to TI-92



Analog lässt sich mit Receive OS / Send OS das Betriebssystem von Rechner zu Rechner übertragen.

Auch der History Bereich lässt sich von Rechner zu Rechner übertragen; er muss dafür zuerst als Textvariable gespeichert werden ([F1] - 2: Save Copy As... oder  $\square$  S) und nach der Übertragung mit dem Text Editor geöffnet und mit [F4] Execute Zeile für Zeile wiederhergestellt werden.

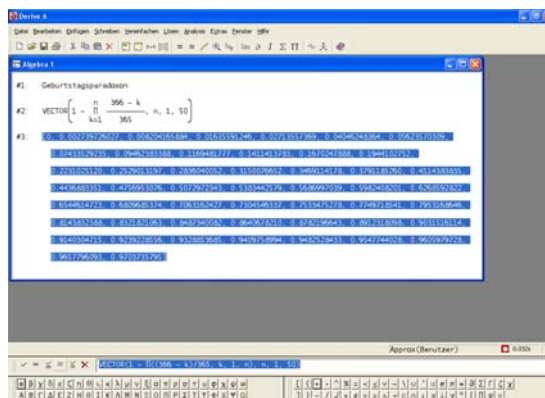


## APPS - Text Editor - 2: Open



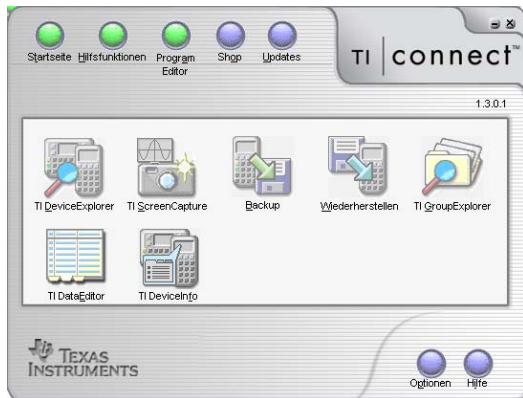
Textvariable lassen sich über TI Connect auch direkt in **Derive** (ab Version 6) importieren und weiterbearbeiten.

## Datei - TI-Taschenrechner - Import von...



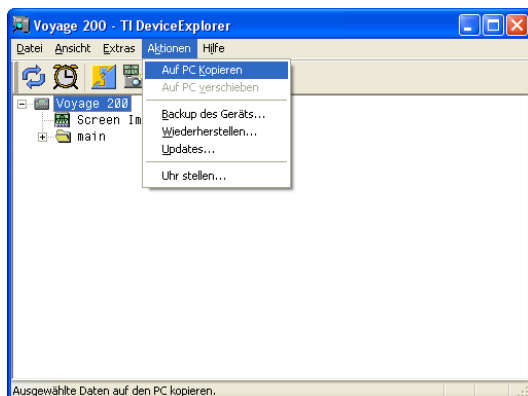
# Rechner ↔ PC

1. Software (TI Connect und / oder TI Graph Link) installieren und Verbindungskabel an PC und Rechner anschließen.

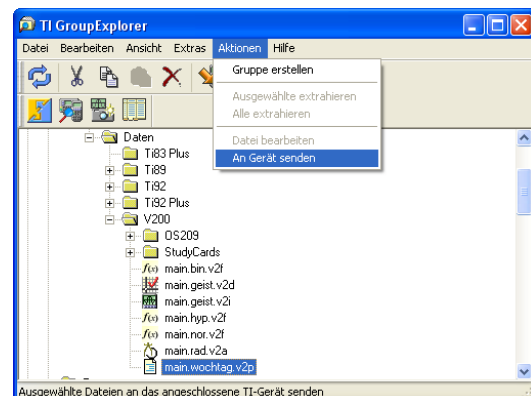


2. Voyage 200 vorbereiten: außer bei Screen-Shots sollte sich der Rechner im HOME-Screen befinden.
3. Datenübertragung

Rechner → PC: TI DeviceExplorer

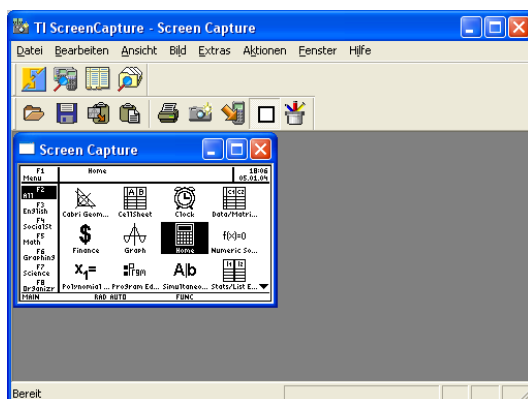


PC → Rechner: TI GroupExplorer

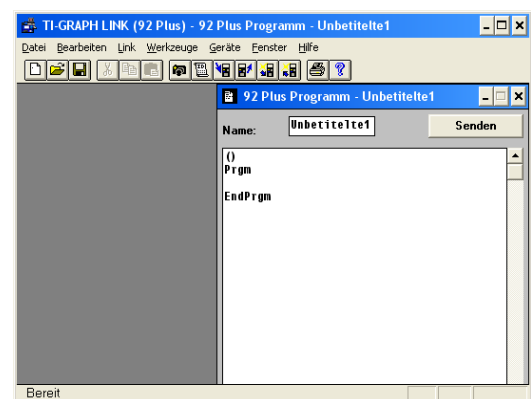


Für die Übertragung des Betriebssystems steht der **TI OSDownloader** zur Verfügung.

Rechner ↔ PC: TI ScreenCapture



Rechner ↔ PC: TI ProgramEditor



Mit dem Program Editor der Graph Link Software lassen sich einzelne Dateien öffnen und bearbeiten.

# Anhang 1:

## Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

### Gesamtschrittverfahren (Jacobi-Verfahren)

**Voraussetzung:** Diagonaldominanz  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

**Prinzip** : Fixpunktform  $x_n = f(x_{n-1})$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$x = \frac{1}{a_{11}} \cdot (b_1 - a_{12}y - a_{13}z)$$

$$y = \frac{1}{a_{22}} \cdot (b_2 - a_{21}x - a_{23}z)$$

$$z = \frac{1}{a_{33}} \cdot (b_3 - a_{31}x - a_{32}y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{x_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}}_D \cdot \left[ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_b - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{A_0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{x_{n-1}} \right]$$

Kurzform:  $\underline{\underline{x_n = D \cdot (b - A_0 \cdot x_{n-1})}}$  mit Startwert  $\underline{\underline{x_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_{11} \\ b_2 \\ a_{22} \\ b_3 \\ a_{33} \end{pmatrix}}}$

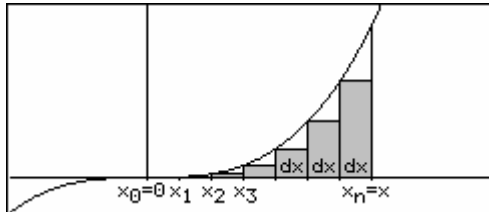
**Bsp.:**  $2x + y = 12$   
 $x - 4y = -3$

# Anhang 2:

## Flächenberechnung mit Ober- und Untersummen

Bsp.:  $f(x) = x^3$

**Untersumme** („Fläche aus der Sicht des Käufers“)



$$A \approx U_n = f(x_0) \cdot dx + f(x_1) \cdot dx + \dots + f(x_{n-1}) \cdot dx$$

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot dx$$

mit  $dx = \frac{x}{n}$

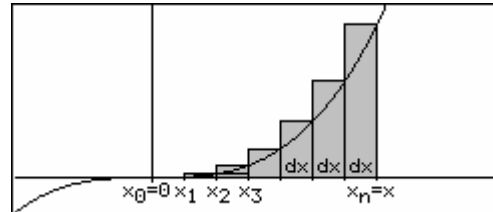
$$x_i = 0 + i \cdot dx = i \cdot \frac{x}{n}$$

$$\Rightarrow U_n = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{i^3}_{f(x_i)} \cdot \underbrace{\frac{x}{n}}_{dx} = \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^4$$

$$U_n = \left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^3$					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n^2 - 2 \cdot n + 1) \cdot x^4}{4 \cdot n^2} \right)$					
$\frac{x^4}{4}$					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

**Obersumme** („Fläche aus der Sicht des Verkäufers“)



$$A \approx O_n = f(x_1) \cdot dx + f(x_2) \cdot dx + \dots + f(x_n) \cdot dx$$

$$O_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot dx$$

...

$$O_n = \left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \sum_{i=1}^n i^3$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \sum_{i=1}^n i^3$					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^2 \cdot x^4}{4 \cdot n^2} \right)$					
$\frac{x^4}{4}$					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

$$\underline{\underline{A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n}}}$$

# Internet Adressen



[www.ti.com](http://www.ti.com)

[education.ti.com/oesterreich](http://education.ti.com/oesterreich)



[www.ticalc.org](http://www.ticalc.org)



[www.acdca.ac.at](http://www.acdca.ac.at)



[www.acdca.ac.at/t3](http://www.acdca.ac.at/t3)



[shop.bk-teachware.com](http://shop.bk-teachware.com)

# Adresse des Autors

Bild öffnen: [GRAPH] - F - Axes = OFF - - 1: Open... - Type = Picture



*Hai.v2i*

Bild löschen: Draw - 1: ClrDraw

Mag. Gerhard Hainscho	
<i>privat:</i> Am Schirm 8 A-9063 Maria Saal Tel. : 042 23 - 30 42 eMail: gerhard.hainscho1@schule.at	<i>Schule:</i> BORG Gartenstraße 1 A-9400 Wolfsberg Tel. : 043 52 - 23 42 - 0 Fax : 043 52 - 23 42 - 30